

令和6年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述 数学

解答例

解答例：数学

問1 関数を含む基本的な方程式が解けることを確認する問題

$$(1) x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = (x+1)(x^2 - 3x + 1) = 0 \text{ より,}$$

$$x = -1, \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

(2) $\sin 2x - \cos x = \cos x(2 \sin x - 1) = 0$ より, $\cos x = 0$, または, $\sin x = \frac{1}{2}$, となるから, $0 \leq x < \pi$ の範囲 (定義域) では,

$$x = \frac{1}{2}\pi, \frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi$$

(3) $\log_2(x-4) + \log_2(x-6) = 3 = \log_2(x-4)(x-6)$ より,

$$(x-4)(x-6) = 2^3 = 8$$

よって, $x = 2, 8$ のうち定義域より $x = 8$ 。

問2 放物線と直線の交点と囲まれた領域の面積, 微分の計算を問う問題

$$f(t) = \int_0^a |x(x-t)| dx = \int_0^t -x(x-t) dx + \int_t^a x(x-t) dx = \frac{t^3}{3} - \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^3}{3}$$

$$f'(t) = t^2 - \frac{a^2}{2}$$

これより $t = \frac{a}{\sqrt{2}}$ で最小値 $\frac{a^3(2-\sqrt{2})}{6}$ 。最大値は $t = 0$ で $\frac{a^3}{3}$ 。

問3 ベクトルを用いた基本的な計算を試す問題

l の方向ベクトルは $d_1 = (1, -2, 3)$ 。

これより l 上の点 H は α を用いて, $(\alpha, -2\alpha - 1, 3\alpha)$ と書ける。

OH と d_1 が垂直となることから, $\alpha = -\frac{1}{7}$ 。 H の座標は $\left(-\frac{1}{7}, -\frac{5}{7}, -\frac{3}{7}\right)$ 。

問4 数列の一般項を求める基本的問題

$$\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 3 \\ a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0 \end{cases}$$

より

$$(a_{n+2} - \alpha a_{n+1}) = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$$

と変形することを考えると、 $\alpha, \beta = 2, 1$ となることがわかるので、 $\alpha = 1, \beta = 2$,
 $\alpha = 2, \beta = 1$, として $(a_{n+2} - \alpha a_{n+1})$ をもとめて、両者の場合で差を取ってもとめると $a_n = 2^n - 1$ 。

問5 複素数の基本的性質を問う問題

$\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right) = \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$ と表されるので、 $\left(\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^5 = (\sqrt{3})^5 e^{-i\frac{5\pi}{6}}$ となり、これより、それぞれ以下の値を得る。

実部： $-\frac{27}{2}$ ，虚部： $-\frac{9\sqrt{3}}{2}$ ，偏角： $-\frac{5\pi}{6}$ 。

問6 確率の基本的な理解を問う問題

(1) すべての目が1となる確率だから、 $P(X=1) = \frac{1}{6^n}$ 。

(2) 1つだけ6で他はすべて1の場合と、2と3が1回ずつで残りがすべて1の場合をすべて考えて、 $P(X=6) = n\frac{1}{6^n} + n(n-1)\frac{1}{6^n} = \frac{n^2}{6^n}$ 。

(3) $n=1$ のとき、 $P(X=8) = 0$ 。

$n=2$ のとき、(4,2) か (2,4) の場合を考えて、 $P(X=8) = \frac{2}{36}$ 。

$n > 2$ のとき、4と2が一つずつで残り全部1か、2が3つ出て残りはすべて1の場合で、 $P(X=8) = n(n-1)\frac{1}{6^n} + n(n-1)(n-2)\frac{1}{6^{n+1}} = \frac{n(n-1)(n+4)}{6^{n+1}}$ 。

問7 積分方程式について理解しているかを問う問題

与えられた式を微分すると $f(x) = 1 + \frac{1}{2x}$ 。

また、 $x=a$ とすると、 $a + \frac{1}{2} \log a = 1$ となり $a = 1$ 。