令和６年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述　物理

課題I, II

(12:30-17:30)

注意事項

1. この冊子は，監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 問題冊子に印刷または製本の不具合がある場合は，手を上げて申し出て下さい。
3. 課題 I および課題 II の問題すべてに解答してください。
4. 解答用紙は課題ごとに分けて使用してください。解答用紙は何枚使用しても構いません。全ての解答用紙に受験番号を必ず記入して下さい。
5. 携帯電話やスマートフォン等の電子機器はすべて電源を切り，カバンにしまってください。
6. その他，監督者の指示に従って下さい。

[I]

鉛直面内のなめらかな曲線上の質量 m の小球の運動を解析しよう。運動する小球は十分に小さく，摩擦や空気抵抗は考えなくてよい。重力加速度の大きさを g として，以下の問いに答えなさい。

A 曲線としてまずは半円の場合を考える。図 1 のように固定された半径 r の半円の頂点に小球を静かに置くと，小球は半円上をすべりだした。

問 1 図 1 で示される，鉛直線とのなす角度が ϕ の位置を小球がすべっているときの小球の速さ v を求めなさい。

問 2 小球は $\phi = \phi_1$ で半円上から離れた。$\cos\phi_1$ を求めなさい。

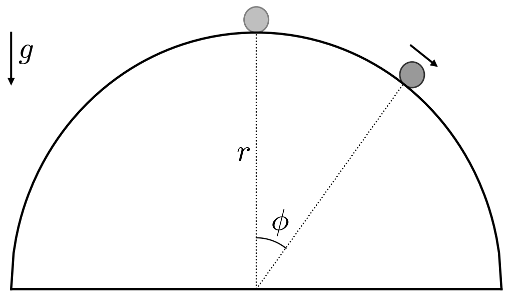

図 1

(次ページに続く)

B　一般の曲線の場合にどのような条件で小球が曲線上から離れるかを考察しよう。水平方向を x 軸，鉛直上向きを y 軸正方向にとる座標系で曲線は $y = f(x)$ で定義されているとする。このような一般の曲線の場合にも，小球の各位置の運動を円周上の運動と近似的にみなすことによって，小球が曲線から離れず運動するかどうか判定できる。具体的には，曲線 $y = f(x)$ 上の任意の点 $(x_{\mathrm{P}}, f(x_{\mathrm{P}}))$ に対し，円周がその点を通り，かつその点での曲線の第 1 次微分係数 $f'(x_{\mathrm{P}})$ と第 2 次微分係数 $f''(x_{\mathrm{P}})$ が，同じ点での円周の第 1 次微分係数 $y'(x_{\mathrm{P}})$ と第 2 次微分係数 $y''(x_{\mathrm{P}})$ とそれぞれ等しくなるような円 $(x - x_{\mathrm{c}})^2 + (y - y_{\mathrm{c}})^2 = R^2$ を考え，その点での小球の運動をこの接円上の運動と近似する。接円は中心が $(x_{\mathrm{c}}, y_{\mathrm{c}})$ で半径が R，また x 軸正方向から反時計回りに定義された偏角 θ の点 $(x_{\mathrm{P}}, y_{\mathrm{P}} = f(x_{\mathrm{P}}))$ で曲線と接している。これらの接円のパラメータは曲線上で小球が移動するとともに変化していく。図 2 に，例としてある曲線上の二つの点のそれぞれでこのようにして定義された接円を破線で示している。

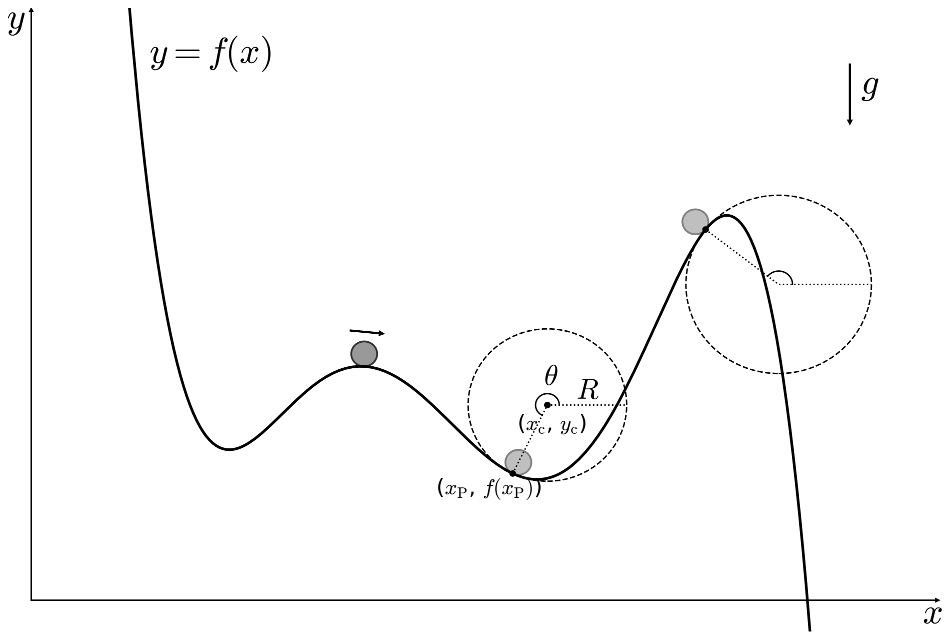

図 2

問 3　接円の方程式 $(x - x_{\mathrm{c}})^2 + (y - y_{\mathrm{c}})^2 = R^2$ をもとに計算することで，接円の円周上の点 $(x_{\mathrm{P}}, y_{\mathrm{P}})$ における y を x の関数と見たときの円周の第 1 次微分係数 $y'(x_{\mathrm{P}})$ および第 2 次微分係数 $y''(x_{\mathrm{P}})$ を x_{P}，y_{P}，x_{c}，y_{c} のうち必要なものを用いて表しなさい。ただし $y_{\mathrm{P}} - y_{\mathrm{c}} \neq 0$ とする。

問 4　接円のパラメータ R と θ の定義より，$x_{\mathrm{P}} - x_{\mathrm{c}} = R\cos\theta$，$y_{\mathrm{P}} - y_{\mathrm{c}} = R\sin\theta$ と書けること，および点 $(x_{\mathrm{P}}, y_{\mathrm{P}} = f(x_{\mathrm{P}}))$ において，問 3 で求めた $y'(x_{\mathrm{P}})$ と $y''(x_{\mathrm{P}})$ に対して $f'(x_{\mathrm{P}}) = y'(x_{\mathrm{P}})$，$f''(x_{\mathrm{P}}) = y''(x_{\mathrm{P}})$ が成り立つことから，$f'(x_{\mathrm{P}})$ と $f''(x_{\mathrm{P}})$ をそれぞれ R と θ のうち必要なものを用いて表しなさい。

問 5 小球の曲線上の各位置での運動をその点での接円上の運動と近似することにより，曲線上を運動している小球がそのまま曲線上を離れず運動する条件は，その位置での小球の速さ v およびその位置での曲線の第 1 次微分係数 f' と第 2 次微分係数 f'' を用いて

$$\left\{1 + (f')^2\right\} g + f'' v^2 > 0 \tag{1}$$

と書けることを示しなさい。

(次ページに続く)

C　具体例として

$$y = f(x) = -b\sin\frac{x}{a} \qquad (x \leqq 2\pi a)$$

で与えられる曲線上の小球の運動を，問 5 の式 (1) で与えられる条件式を用いて調べよう。ただし $a > 0$，$b > 0$ とする。図 3 のように原点 (0, 0) の位置にある小球に対して原点での曲線 $y = f(x)$ の接線方向に速さ v_0 で x の正の向きに運動させた。

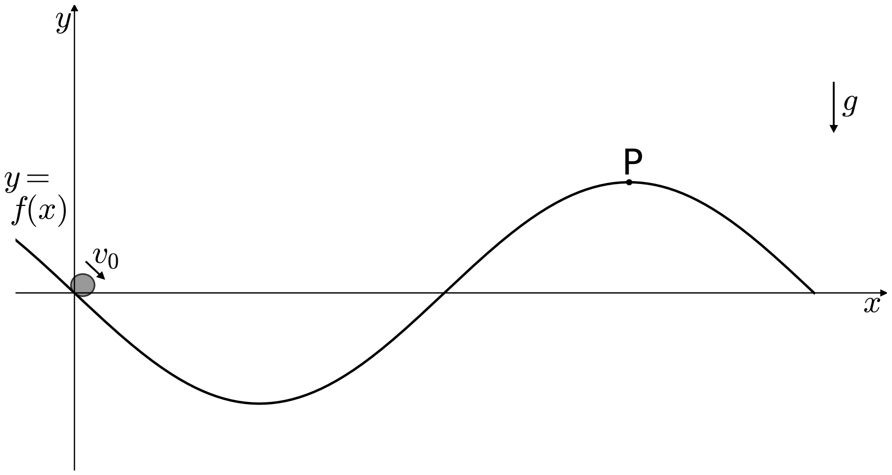

図 3

問 6 小球が $x = 0$ から $x = 2\pi a$ の範囲の曲線上のある点 $(x,\ f(x))$ まで曲線上を一度も離れずに運動したとき，その位置での小球の速さ v を v_0，a，b，g，x のうち必要なものを用いて表しなさい。

問 7 原点から運動を始めた小球が，曲線上を一度も離れることなく点 P $\left(\dfrac{3}{2}\pi a,\ b\right)$ に到達するためには v_0 が $v_{0,\mathrm{min}} < v_0 < v_{0,\mathrm{max}}$ の範囲になくてはならない。$v_0 < v_{0,\mathrm{min}}$ の場合は，小球は点 P の手前で引き返す。$v_{0,\mathrm{min}}$ を g，a，b のうち必要なものを用いて表しなさい。

問 8 問 7 の $v_{0,\mathrm{max}}$ を g，a，b のうち必要なものを用いて表しなさい。

問 9 $v_0 > v_{0,\mathrm{max}}$ のとき，小球は $\pi a < x_1 < \dfrac{3}{2}\pi a$ を満たす $x = x_1$ で曲線上を離れる。小球が曲線上を離れるときの y 座標 $y_1 = f(x_1)$ を v_0，a，b，g のうち必要なものを用いて表しなさい。

問 9 の問題文の条件を満たし，$x = x_1$ で曲線上を離れた小球は図 4 のように放物運動を行い，x 軸上の点 B に到達した。放物運動の x 軸からみた最大の高さを H，曲線の終端の点 A$(2\pi a,\, 0)$ から点 B までの距離を L とする。$x = x_1$ で曲線上を離れた小球が再び曲線とぶつかる可能性は考えなくてよいものとして，以下の問いに答えなさい。

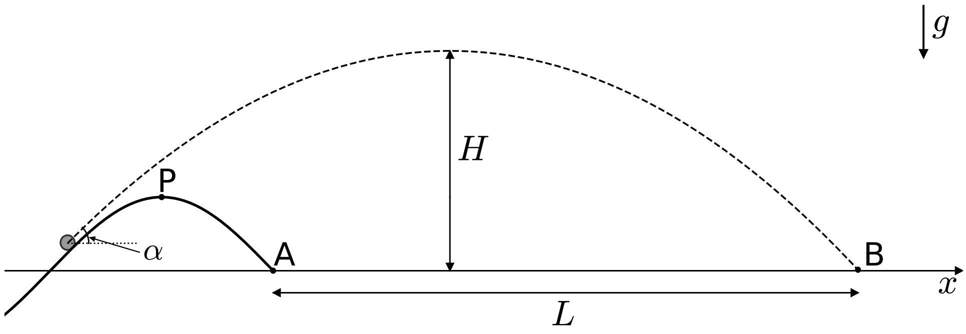

図 4

問 10 小球が $(x_1,\, y_1)$ で曲線上を離れた瞬間の，小球の速度の向きと x 軸正方向のなす角を α とする。ただし α は $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす。$\tan\alpha$ を v_0，a，b，g のうち必要なものを用いて表しなさい。

問 11 放物運動の x 軸からみた最大の高さ H を v_0，a，b，g，$\tan\alpha$ のうち必要なものを用いて表しなさい。

問 12 v_0 を十分大きな値にとると，$\tan\alpha$ は v_0 によらないある値に近づく。その値を a，b を用いて表しなさい。必要があれば $|x| \ll 1$ の場合に成り立つ近似式 $\sqrt{1+x} \fallingdotseq 1 + \dfrac{x}{2}$ を用いなさい。

問 13 問 12 で考えた十分大きなある v_0 に対して，a を固定した上で b を変化させるとき，距離 L を最大にする b を求めなさい。

(次ページに続く)

D　次に，他の具体例として

$$y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{d}{2}\left(\cos\dfrac{x}{s} - 1\right) & (0 \leqq x \leqq 2\pi s) \\ 0 & (x < 0,\quad 2\pi s < x) \end{cases}$$

で与えられる曲線上の小球の運動を，問5の式(1)で与えられる条件式を用いて調べよう。ただし $d > 0$，$s > 0$ とする。図5のように $x < 0$ のある位置から速さ v_0 で x の正の向きに運動させた場合に，以下の問いに答えなさい。

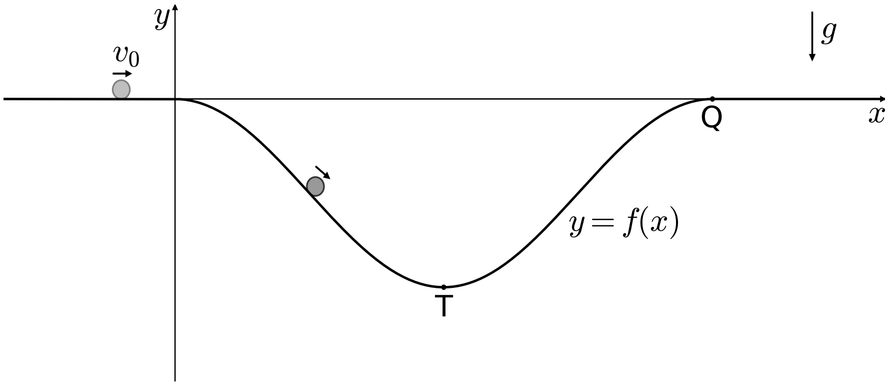

図5

問14 小球が一度も曲線上を離れることなく運動し点 Q$(2\pi s, 0)$ に到達するために，v_0 が満たすべき条件を d，s，g のうち必要なものを用いて表しなさい。

問15 小球が問14の条件を満たして運動するものとする。点 T$(\pi s, -d)$ で小球が曲線から受ける垂直抗力 N を m，d，s，g，v_0 のうち必要なものを用いて表しなさい。

問16 問14と問15の結果を用いることで，速さ v_0 で平面を滑っているスキーヤーが $y = f(x)$ で表される形状のくぼみを通過するときの運動を考察しよう。$v_0 = 36$ km/h，$s = 1.0$ m，重力加速度を $g = 9.8$ m/s^2 として，小球で近似されるスキーヤーが地面から離れずにくぼみを通過して点Qに達するための，くぼみの深さ d が満たすべき条件を求め，さらにこの条件下で点Tにおける垂直抗力 N と重力 mg との比 $\dfrac{N}{mg}$ がとりうる最大値の概数値を求めなさい。

（空白のページ）

[II]

荷電粒子は電場や磁場により，その速度が変化する。この性質を利用すると，荷電粒子の質量 m を測定したり，特定の運動エネルギーをもつ荷電粒子だけを集めることができる。以下の設問に従って，その原理を考えてみよう。

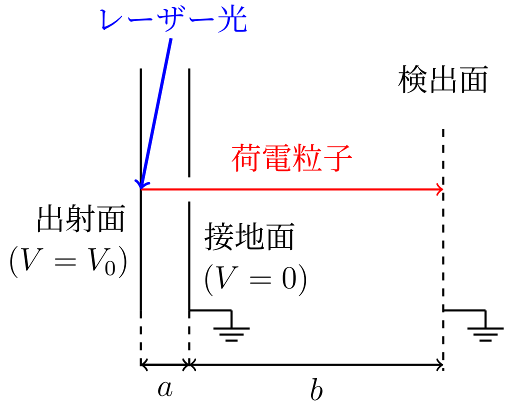

図 1

最初はレーザー光を照射すると，質量 m，電荷 $q\,(q > 0)$ の荷電粒子が出射面から初速 0 で放出される装置を考えよう。図 1 のように出射面，接地面，検出面は平行で，出射面と接地面は a, 接地面と検出面は b 離れている。出射面に正の電位 (V_0) をかけると，荷電粒子は加速され，接地面の小孔を通って接地された検出面に到達する。荷電粒子が出射面から放出され，検出面に到達するまでの時間 Δt を以下の設問に従って導きなさい。なお装置は真空中にあり，真空の誘電率を ε_0 とする。

問 1 出射面と接地面を金属で製作すると，コンデンサーと同様に，2 つの向かい合った面の間にだけ電場が発生する。2 つの面の面積をそれぞれ S として，電場の強さ E と向きを求めなさい。また出射面に蓄えられる電荷 Q を求めなさい。出射面の電位は V_0，接地面の電位は 0 である。

問 2 荷電粒子が出射面から放出され，検出面に到達するまでの時間 Δt を求めなさい。またこの関係を用いて，質量 m を Δt，q，V_0，a，b を用いて表しなさい。

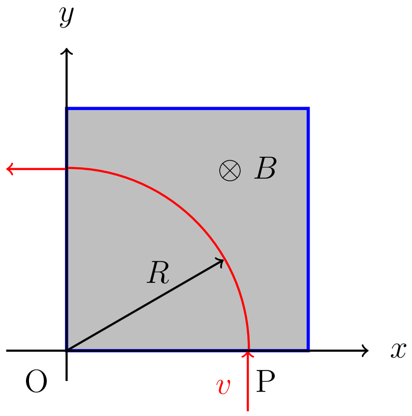

図 2

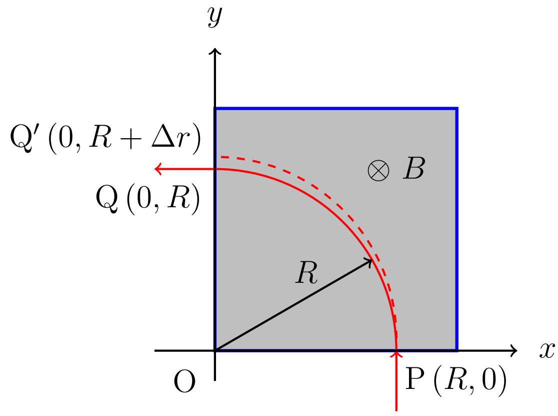

図 3

次に荷電粒子の軌跡からその質量を測定する方法を考える。図 2 に示すように磁束密度 B の磁場が紙面に垂直で一様な領域に，点 P から荷電粒子を磁場に垂直に入射すると，その軌跡は円弧となる。

問 3 質量 m，電荷 $q\,(q>0)$ の荷電粒子を，速度 $(v_x, v_y) = (0, v)$ で入射させると，その軌跡が，図 2 に示すように座標の原点 O を中心とする半径 R の円弧となった。このときの軌道半径 R を求めなさい。磁束密度の大きさ B は一定で，磁場は紙面に垂直で表から裏へと向かうとする。

問 4 図 1 の装置で加速した荷電粒子を図 2 の装置に入射させた場合を考える。このときの荷電粒子の軌道半径 R を，m, q, V_0, B を用いて表しなさい。

図 3 は図 2 に少しずれた軌跡を破線で書き加えたものである。入射角度が y 軸方向からずれている場合や，質量が m より少し大きい場合には，破線で示すように荷電粒子は点 Q から Δr ずれた点 Q′ を通過する。図 1 の装置の電圧 V_0 は一定に保たれているという条件のもとで，それぞれの場合について位置のずれを求めてみよう。

問 5 質量 m の荷電粒子が点 P で速度が $(v_x, v_y) = (v\sin\theta, v\cos\theta)$ のとき，$\Delta r \fallingdotseq f(R)\theta$ と表せる。関数 $f(R)$ を求めなさい。ただし $\theta\,(|\theta| \ll 1)$ はラジアンで測った角度で，$\sin\theta \fallingdotseq \theta$ かつ $\cos\theta \fallingdotseq 1$ であることを証明せずに使って良い。

問 6 質量が $m + \Delta m$ (ただし $|\Delta m| \ll m$) の場合，$\Delta r \fallingdotseq h(R)\dfrac{\Delta m}{m}$ という関係が得られる。この設問では点 P より x 軸に垂直に入射する荷電粒子を考え，関数 $h(R)$ を求めなさい。また一般に $|s| \ll 1$ の場合，実数 n に対して $(1+s)^n \fallingdotseq 1 + ns$ が成り立つことを証明せずに使って良い。

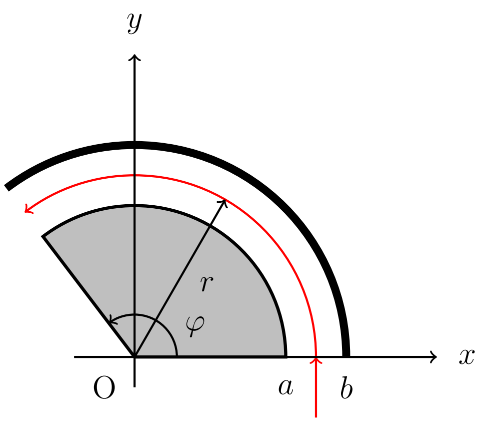

図 4

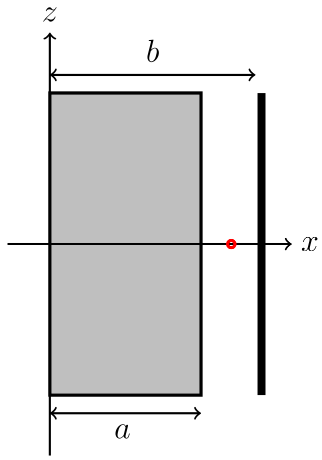

図 5

図 4 に示すように真上から見た断面が半径 a，角度 φ の扇型と，内径が b の円弧となる装置を考える。この装置の $y=0$ での断面は図 5 のようになっていて，装置は扇型と円弧の間隔 $b-a$ に比べ z 方向に十分に長く延びている。扇型も円弧も金属で，適切な電圧を加えると，コンデンサーと同様に扇型と円弧の間だけに扇型の中心へと向かう電場が生じる。また電場の強さは z 軸からの距離 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ の関数 $E(r)$ であると考えて良い。従って電位も

$$V(r) = -\int_a^r E(r')dr' \tag{1}$$

のように積分を用い，r の関数として表すことができる。ここで扇型の中心からの距離が r' の点での電場の強さ $E(r')$ は，扇型の中心から外向きを正とするので符号に注意すること。電位差が適切であれば，この空隙を運動する荷電粒子の軌道を半径 $r=R$ の円弧とすることができる。この装置の仕組みを考えてみよう。荷電粒子は $z=0$ の面内を運動すると考える。

問 7 質量 m，電荷 q の荷電粒子が速度 v で半径 R の円運動をするために必要な，半径 $r=R$ での電場の大きさ E_0 を求めなさい。

問 8 問 7 で求めた電場が発生するときの電位 $V(b)$ を求めたい。電気力線がどのようになるか考え，扇型の中心からの距離が r $(a<r<b)$ の点での電場ベクトルの r 成分 $E(r)$ を求めなさい。また式 (1) を用いて電位 $V(b)$ を求め，E_0, R, a, b を用いて表しなさい。

問 9 図 1 の装置で加速した荷電粒子を図 4, 図 5 の装置に入射する場合を考えよう。荷電粒子が半径 $r=R$ の円弧に沿って運動するのは，V_0 と $V(b)$ がある関係を満たす場合に限られる。この関係を求めるとともに，その関係式は質量 m や電荷 q によらないことを示しなさい。

問 5 で考えたように磁場を使った装置では，垂直に入射しなかった場合は出射位置がずれる。電場を使った装置では，扇型の角度 φ を 120° に近いある角度に設定すれば，この問題を解決できることを示そう。

この装置の $z = 0$ の面での電場は図 4 の原点 O の方を向いているので，面積速度一定の法則 (高校物理の教科書「ケプラーの第 2 法則」を参照すること) が成り立つ。この法則が成り立つことを以下の設問に従って確認しなさい。

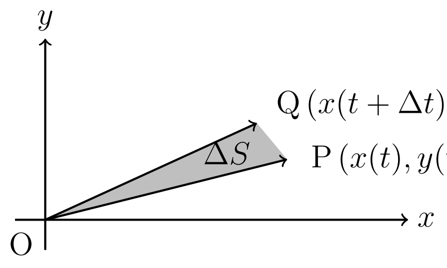

図 6

問 10 図 6 を使って xy 平面上を運動する荷電粒子の面積速度 $\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ を求めよう。原点を O, 時刻 t と $t+\Delta t$ での荷電粒子の位置を P, Q とすると，面積速度は三角形 OPQ の面積 ΔS と時間差 Δt の比である。面積速度を時刻 t での荷電粒子の位置 $(x(t), y(t))$ と速度 $(v_x(t), v_y(t))$ を用いて表しなさい。時刻 $t+\Delta t$ での位置は $x(t+\Delta t) \fallingdotseq x(t)+v_x(t)\Delta t$, $y(t+\Delta t) \fallingdotseq y(t)+v_y(t)\Delta t$ と考えて良い。

問 11 z 軸からの距離 $r = \sqrt{x^2+y^2}$ を用いると，この装置での電場ベクトルは

$$\overrightarrow{E} \;=\; (E_x, E_y) \;=\; \left(\frac{E(r)x}{r}, \frac{E(r)y}{r}\right) \tag{2}$$

と表せる。この電場によるクーロン力は荷電粒子の面積速度の 2 倍に対応する量 $j = 2\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ を時間変化させないことを運動方程式を用いて示しなさい。

(次ページに続く)

半径 r，速さ v で等速円運動する質量 m の荷電粒子の遠心力 (つまり慣性力) は，外向きでその大きさは

$$F' = \frac{mv^2}{r} \tag{3}$$

である。この荷電粒子では，$j = 2\dfrac{\Delta S}{\Delta t} = rv$ なので，$v = \dfrac{j}{r}$ が得られる。これを式 (3) に代入すると

$$F' = \frac{mj^2}{r^3} \tag{4}$$

が得られる。等速円運動していない場合でも，式 (4) は z 軸から遠ざかる向きの慣性力 (= 遠心力) を正しく与えることが知られている。

問 12 問 8 で求めた電場 $E(r)$ を用いて， $j = Rv$ の荷電粒子に働く力を求めよう。原点から荷電粒子までの距離が $r = R + \Delta r$ であるとき，荷電粒子に働く電場による力 F と遠心力 F' の和は

$$F + F' \fallingdotseq -\kappa \Delta r \tag{5}$$

と表せることを示し，κ を求めなさい。ただし，$|\Delta r| \ll R$ として適切な近似を行うこと。

問 13 式 (5) は $F + F'$ が，$r = R$ の位置に戻そうとする復元力であることを示している。半径 $r = R$ から少し斜めに入射した荷電粒子の半径 r は $r = R$ のまわりでわずかに増減するが，角度が φ のとき半径 $r = R$ にはじめて戻ってくる。このことを利用して角度 φ を求めなさい。