

## 代数学と作図問題

定規とコンパスをある決められたルールに従い有限回の操作で作図することと方程式を解くこととは深い関係がある。

代数学での加減乗除と平方根を求めること（2次方程式を解くこと）はそのまま定規とコンパスによる作図問題に置き換えることができる。つまり、定規は1次式、コンパスは2次式に相当すると捉えることもできる。

ガロア理論と呼ばれる理論によると、5次以上の方程式は代数的に解けない場合があり、ガロアは代数的に解けるための条件を解の置換から定まるガロア群というものをを用いて説明した。

ギリシアの3大作図不能問題として有名な、立方倍積問題、角の3等分問題、円積問題などは方程式の問題に置き換えて議論することで解決された。

ちなみに、折り紙や曲尺のように同時に2点を定めることができる機械や3乗根を作図できる超コンパスがあれば角の3等分は作図可能であるという。

ここでは簡単であるが加減乗除と平方根の作図例とその応用として正五角形の作図、2次方程式の解を求める作図を示す。

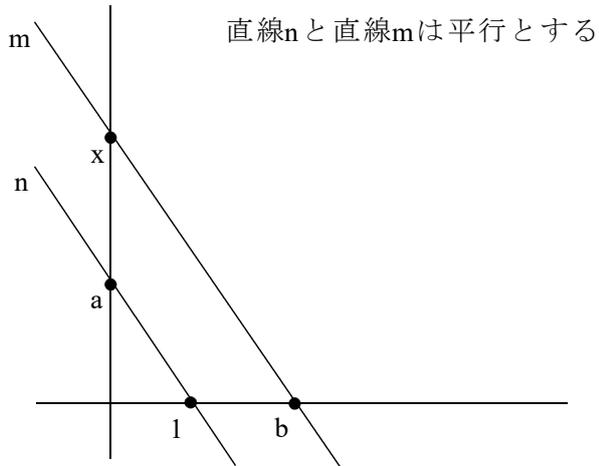
以下の URL を参考にしました。

<file:///C:/Users/asd/Downloads/KJ00004170556.pdf>

<http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/algebra/member/files/tsuzuki/lec.pdf>

<http://hooktail.sub.jp/algebra/Greek3Probs2/>

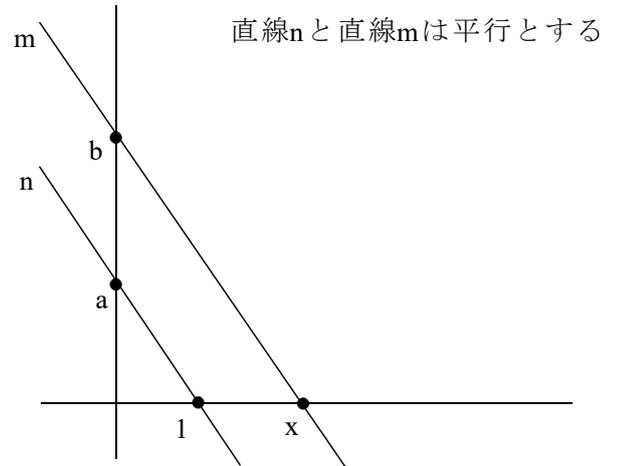
abの掛け算の作図



$$a : 1 = x : b$$

$$x = ab$$

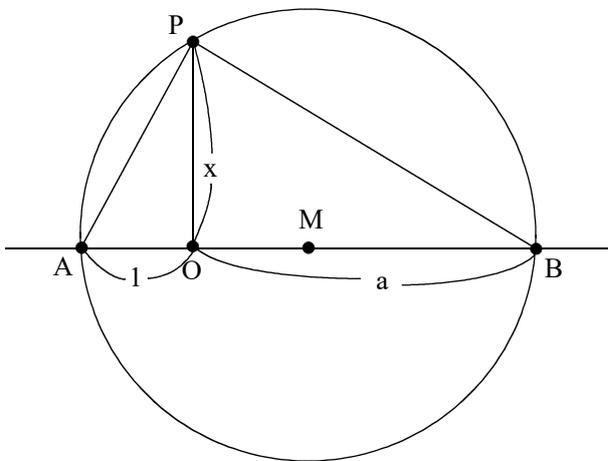
abの割り算の作図



$$a : 1 = b : x$$

$$x = b/a$$

$\sqrt{a}$  の作図



Pは円周上の点,OA=1,OB=a,Mは円の中心,OPとABは直交する。

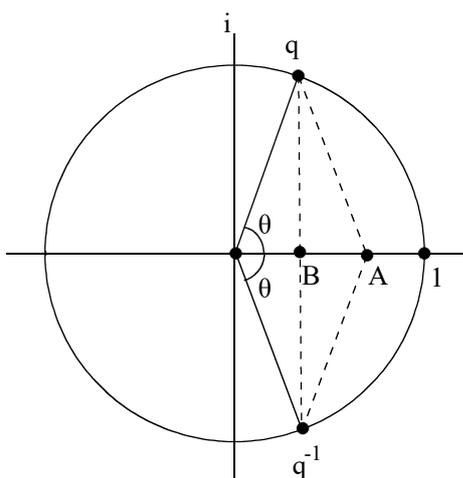
$\triangle OPB, \triangle OAP$ の相似から

$$1 : x = x : a$$

$$x^2 = a$$

$$x = \sqrt{a}$$

正五角形の作図【応用例】



複素平面上の点 $q$ は  $\theta = \frac{2\pi}{5}$  とする。

$$q = e^{\frac{2\pi i}{5}}$$

$$q^{-1} = e^{-\frac{2\pi i}{5}}$$

$$q^5 = 1$$

$$q^5 - 1 = (q-1)(q^4 + q^3 + q^2 + q + 1) = 0$$

$$q^4 + q^3 + q^2 + q + 1 = 0$$

$$q^2 + q + 1 + q^{-1} + q^{-2} = 0$$

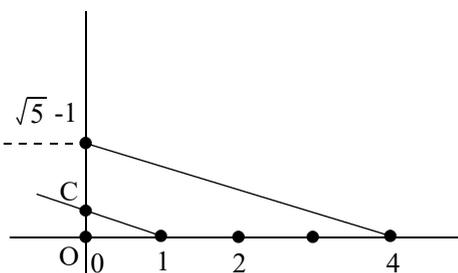
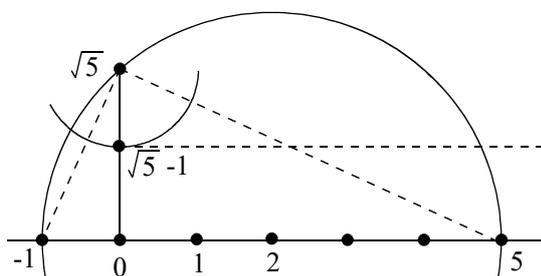
$q + q^{-1} = t$  とおくと  $q^2 + q^{-2} = t^2 - 2$  より

$$t^2 + t - 1 = 0$$

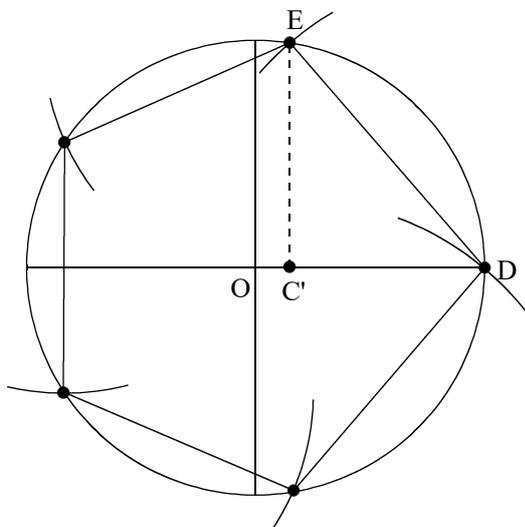
$t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$   $t$  は点Aの座標に当たる

したがってB点の座標は  $\frac{t}{2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$

この値を作図によって求める。



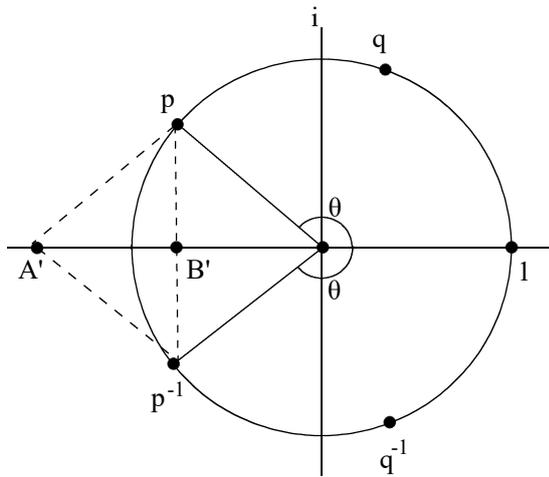
OCの長さが点Bの座標になる。



$OC = OC'$  になる点 $C'$  から垂線を立て  
円周と交わる点Eを求める。

弦DEで円周を分割した点を線分で結ぶ。

さらに、5乗すると1になる複素平面上の点は2つある。



複素平面上の点 $p$ は  $\theta = \frac{4\pi}{5}$  とする。

$$p = e^{\frac{4\pi i}{5}}$$

$$p^{-1} = e^{-\frac{4\pi i}{5}}$$

$$p^5 = 1$$

$$p^5 - 1 = (p-1)(p^4 + p^3 + p^2 + p + 1) = 0$$

$$p^4 + p^3 + p^2 + p + 1 = 0$$

$$p^2 + p + 1 + p^{-1} + p^{-2} = 0$$

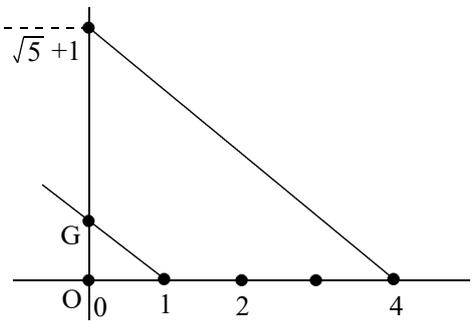
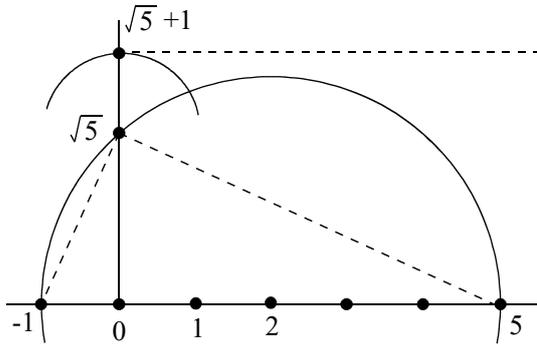
$$p + p^{-1} = t \text{ とおくと } p^2 + p^{-2} = t^2 - 2 \text{ より}$$

$$t^2 + t - 1 = 0$$

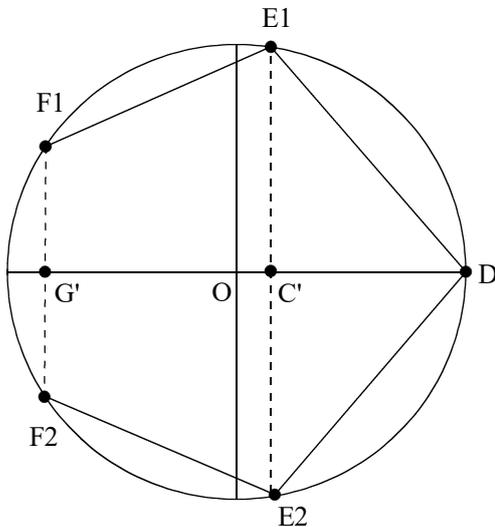
$$t = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \quad t \text{ は点A'の座標に当たる}$$

$$\text{したがってB'点の座標は } \frac{t}{2} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$$

この値を作図によって求める。



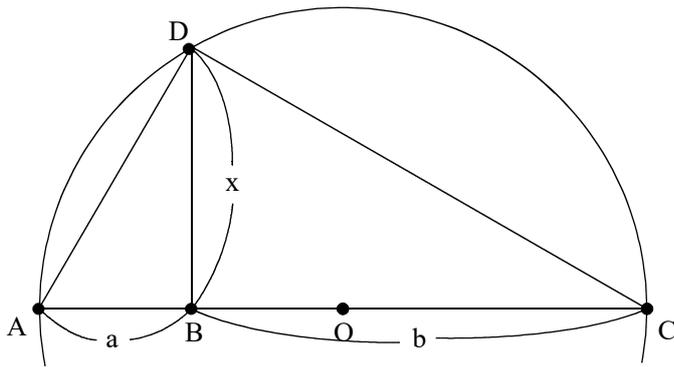
OGの長さが点B'の座標になる。



OG=OG' になる点G' から垂線を立て円周と交わる点F1、点F2を求める。

さらに前項で求めたC' から点E1、点E2を求めそれらを線分で結ぶ。

2次方程式の解【応用例】

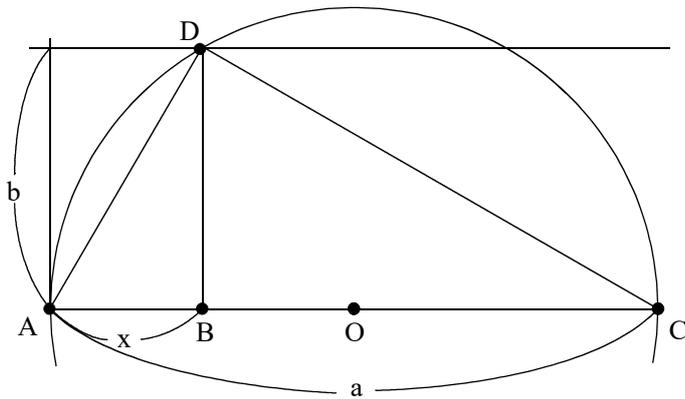


$\triangle ABD$  と  $\triangle DBC$  の相似より

$$a : x = x : b$$

$$x^2 = ab$$

$$x^2 - ab = 0$$

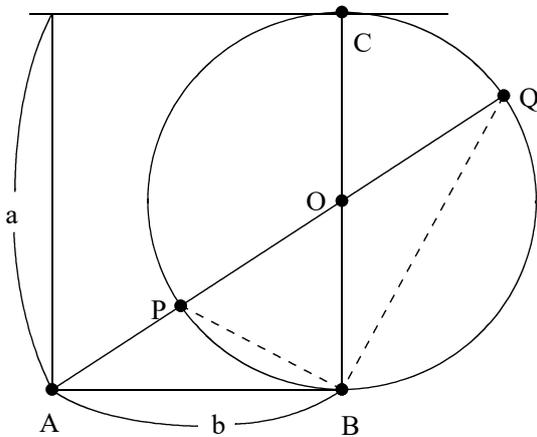


$\triangle ABD$  と  $\triangle DBC$  の相似より

$$x : b = b : (a - x)$$

$$x(a - x) = b^2$$

$$x^2 - ax + b^2 = 0$$



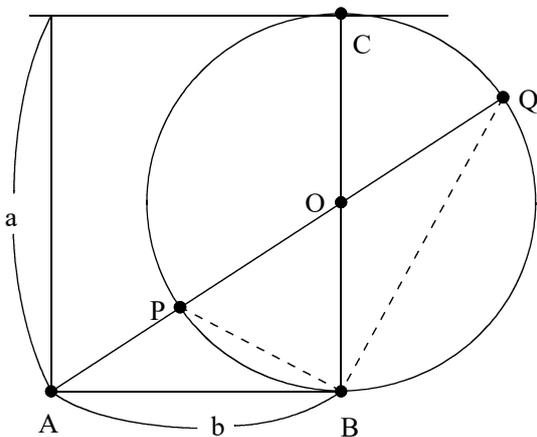
$\triangle AQB$  と  $\triangle ABP$  の相似より

AQ の長さを  $x$  とすると

$$b : (x - a) = x : b$$

$$x(x - a) = b^2$$

$$x^2 - ax - b^2 = 0$$



$\triangle AQB$  と  $\triangle ABP$  の相似より

AP の長さを  $x$  とすると

$$b : x = (x + a) : b$$

$$x(x + a) = b^2$$

$$x^2 + ax - b^2 = 0$$

(1)  $AB = 1, BC = 2a, CD = b$  とする.

(2)  $AD$  を直径とする円を描く.

(3) この円と  $BC$  を上に伸ばし, 円と交わった点を  $E$  とする.

$\triangle ABE$  と  $\triangle ECD$  は相似なので

(4)  $BE$  の長さが  $a + \sqrt{a^2 + b}$  となり, これは  $x^2 - 2ax - b = 0$  の解である.

