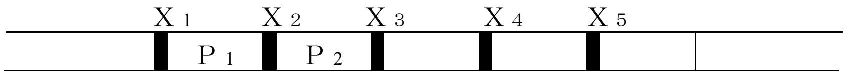
管の中を伝わる音速について　――　運動方程式から音速を求める　――

断面積s　X_1 から等間隔（⊿x）に X_2 、X_3 、X_4 ・・・
各 X_n と X_{n+1} の間の質量は各区間の先頭に集まっているものとする。
時刻 t_0 の瞬間に X_1 の位置が d_0 だけ変位した。
その後、⊿t 秒おきに同じ変位が右に移っていくものとする。

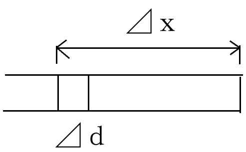


t_0	d_0				
t_1	d_1	d_0			
t_2	d_2	d_1	d_0		
t_3	d_3	d_2	d_1	d_0	
t_4	d_4	d_3	d_2	d_1	d_0
t_5	d_5	d_4	d_3	d_2	d_1
t_6	d_6	d_5	d_4	d_3	d_2

t_3 の時刻の位置 X_2 の場所の加速度は

$$\frac{\dfrac{d_3-d_2}{\Delta t}-\dfrac{d_2-d_1}{\Delta t}}{\Delta t}=\frac{(d_3-2d_2+d_1)}{(\Delta t)^2}$$

断熱の関係式より



⊿x の気柱の長さが⊿d だけ縮んだとする、断面積をsとする

$PV^{\gamma}=P_0V_0^{\gamma}$ 　より

$$\Delta P=P-P_0=\frac{P_0V_0^{\gamma}}{V^{\gamma}}-P_0=-P_0\left(1-\left(\frac{V_0}{V}\right)^{\gamma}\right)$$

$$=-P_0\left(1-\left(\frac{s\Delta x}{s(\Delta x-\Delta d)}\right)^{\gamma}\right)$$

$$=-P_0\left(1-\left(1-\frac{\Delta d}{\Delta x}\right)^{-\gamma}\right)$$

$$=\frac{P_0\gamma\Delta d}{\Delta x}$$

t_3 の時刻に位置 X_2 の場所に加わる力は、P_1 の圧力と P_2 の圧力から作用する力の差

$$\frac{P_0\gamma s}{\Delta x}(d_3-d_2)-\frac{P_0\gamma s}{\Delta x}(d_2-d_1)=\frac{P_0\gamma s}{\Delta x}(d_3-2d_2+d_1)$$

質量は　$\rho s \Delta x$　　　　　ρ は体積密度

運動方程式は

$$\frac{P_0 \gamma s}{\Delta x}(d_3 - 2d_2 + d_1) = \rho s \Delta x \frac{(d_3 - 2d_2 + d_1)}{(\Delta t)^2}$$

位置 X_2 の場所の波動の伝わる速さは

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 = \frac{P_0 \gamma}{\rho} = \frac{\frac{nRT}{V_0}\gamma}{\rho} = \frac{RT\gamma}{\frac{\rho V_0}{n}} = \frac{R\gamma(273 + t)}{M}$$

$$= \frac{R\gamma\,273}{M}\left(1 + \frac{t}{273}\right)$$

M は 1 モルの質量
t は　℃

$$\therefore \frac{\Delta x}{\Delta t} = \left(\frac{R\gamma\,273}{M}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{t}{273}\right)^{\frac{1}{2}}$$

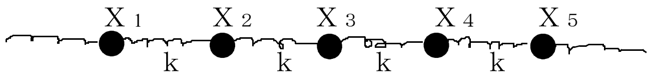
$$= \sqrt{\frac{8.31 \times 1.4 \times 273}{0.0289}} \times \left(1 + \frac{t}{2 \times 273}\right)$$

$$= 331.5 + 0.6\,t$$

この速さで同じ変位が右に伝わっていく

バネを伝わる縦波の速度について　―― 運動方程式から求める ――

X_1 から等間隔（Δx）に X_2 、X_3 、X_4 ・・・
各 X_n と X_{n+1} の間の質量は各区間の先頭に集まっているものとする。
時刻 t_0 の瞬間に X_1 の位置が d_0 だけ変位した。
その後、Δt 秒おきに同じ変位が右に移っていくものとする。



t_0	d_0				
t_1	d_1	d_0			
t_2	d_2	d_1	d_0		
t_3	d_3	d_2	d_1	d_0	
t_4	d_4	d_3	d_2	d_1	d_0
t_5	d_5	d_4	d_3	d_2	d_1
t_6	d_6	d_5	d_4	d_3	d_2

t_3 の時刻の位置 X_2 の場所の加速度は

$$\frac{\dfrac{d_3-d_2}{\Delta t}-\dfrac{d_2-d_1}{\Delta t}}{\Delta t}=\frac{(d_3-2d_2+d_1)}{(\Delta t)^2}$$

t_3 の時刻に位置 X_2 の場所に加わる力は、両隣のバネから作用する力の差

$$k(d_3-d_2)-k(d_2-d_1)=k(d_3-2d_2+d_1)$$

質量は　$\rho\Delta x$　　　　**ρ は線密度**

バネの直列より

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{k}+\frac{1}{k}+\frac{1}{k}+\cdots=\frac{1}{K}$$　　K はバネ全体のバネ定数

$$k=nK \qquad n=\frac{L}{\Delta x}$$　　L はバネの全長

運動方程式は

$$\frac{LK}{\Delta x}(d_3-2d_2+d_1)=\rho\Delta x\frac{(d_3-2d_2+d_1)}{(\Delta t)^2}$$

位置 X_2 の場所の波動の伝わる速さは

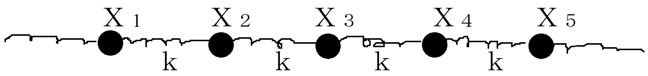
$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2=\frac{LK}{\rho}=\frac{YA}{PA} \qquad \because\ Y=\frac{KL}{A}$$

Y はヤング率
A は断面積
P は体積密度

$$\therefore\ \frac{\Delta x}{\Delta t}=\sqrt{\frac{Y}{P}}$$

この速さで同じ変位が右に伝わっていく

バネを伝わる波について　――――　拡張（偏微分につなげる）　――――



t_0	d_0				
t_1	d_1	d_0			
t_2	d_2	D_1	d_0		
t_3	d_3	d_2	d_1	d_0	
t_4	d_4	D_3	d_2	d_1	d_0
t_5	d_5	d_4	d_3	d_2	d_1
t_6	d_6	d_5	d_4	d_3	d_2

上の図は位置を固定した値 D_1、D_3 、時間を固定した値 d_1、d_3の記号を区別したものである。

運動方程式は

$$\frac{LK}{\Delta x}(d_3-2d_2+d_1)=\rho\Delta x\frac{(D_3-2d_2+D_1)}{(\Delta t)^2}$$

$$\frac{LK}{\rho(\Delta x)^2}(d_3-2d_2+d_1)=\frac{(D_3-2d_2+D_1)}{(\Delta t)^2}$$

$\frac{LK}{\rho}$ は定数なので、これをV^2とすると

$$V^2\frac{\frac{d_3-d_2}{\Delta x}-\frac{d_2-d_1}{\Delta x}}{\Delta x}=\frac{\frac{D_3-d_2}{\Delta t}-\frac{d_2-D_1}{\Delta t}}{\Delta t}$$

この式は空間的加速度と時間的加速度の比は波の伝わる速さの二乗になっている事を示している。（空間的加速度、時間的加速度の言葉は筆者が作った造語）

Δx 及び Δt、V^2 を 1 とすると

$$(d_3-d_2)-(d_2-d_1)=(D_3-d_2)-(d_2-D_1)$$

$$D_3=(d_3+d_1)-D_1$$

未来の変位は、現在の前後の変位の和から過去の変位を引いたものになる
これをコンピュータでシミュレーションしてみた。

波動のように同じ変化が時間とともに伝わっていく現象を理科研究で取り上げる場合、まず微小部分に加わっている力を見つけ、その力が微小部分の質量に作用しているものと考えて運動方程式を立てることで見通しの良い理論が構築できるかもしれません。

ここで仮定したように、⊿ｔ秒おきに同じ変位が右に移っていくと考えた段階で波動方程式を想定したことになる。

何かが広がっていく現象には波動の他に拡散がある。これは着色した水を無色の水に滴下したとき、煙が空気中に広がるときなどがそれである。拡散では同じ変位が時間とともに伝わっていくようなことはなく、粒子の動きは常に過去を忘れてしまう。右方向に何かが拡散していく様子を下図に示す。d_0～d_{24}までの変位は互いに関係のない勝手な数値である。現在、過去、未来、左右どこをとっても同じように変位することはなく乱雑な動きをするのでここで示したような考え方を適用することはできない。

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
t_0	d_0				
t_1	d_1	d_7			
t_2	d_2	d_8	d_{13}		
t_3	d_3	d_9	d_{14}	d_{18}	
t_4	d_4	d_{10}	d_{15}	d_{19}	d_{22}
t_5	d_5	d_{11}	d_{16}	d_{20}	d_{23}
t_6	d_6	d_{12}	d_{17}	d_{21}	d_{24}