対称性

「同じ操作を２回行うと元に戻る」対称性に関する操作だけを考える。

まずは一次元、直線状の図形を考えてみる。原点を決めさえすれば、許される操作は(1-1)「何もしない」（これも立派な対称性である）と(1-2)「原点に対しひっくり返す」の２つである。

二次元、平面上の図形では、原点と座標軸が決まれば、許される操作は(2-1)「何もしない」、(2-2)「ｘ軸に対しひっくり返す」、(2-3)「ｙ軸に対しひっくり返す」、(2-4)「原点を中心に１８０度回転させる」の４つである。(2-2)と(2-3)で軸に対しひっくり返した図形と元の図形は線対称の関係に、(2-4)で原点を中心にまわした図形と元の図形は点対称の関係にある。ここで、(2-3)は「(2-2)と(2-4)を続けて行った」操作と同じであるため、独立な操作は(2-3)を除く３種類である。次元が上がることで、(1-2)が(2-2)と(2-4)に区別され、一次元とは異なり線対称と点対称が異なるものになる。

三次元、立体状の図形では、許される独立な操作は(3-1)「何もしない」(3-2)「yz 平面に鏡を置いて得た像にする（鏡面対称)」(3-3)「x 軸のまわりに１８０度回転させる（回転対称)」(3-4)「原点を中心にひっくり返す（反転対称)」の４つである。鏡面対称と回転対称が３通りずつあるので、計８種類となる。反転対称は、バスケットボールを両手で持ち、ボールから指が離れないように右手首を１８０度ひねった時の両手の関係に当たる。二次元の線対称が三次元では鏡面対称と回転対称に、二次元の点対称が三次元では回転対称と反転対称に分かれる。

次元を上げるたびに、独立な対称操作が１つ増えていく。

では、図形でなくて数ではどうなるか。

普通の数だと、「1 をかける」と「-1 をかける」の２つの操作がある。複素数を許したとしても、これは変わらない。

さて、「２次元の数」はどうだろうか。まずは２次のベクトルが頭に浮かぶ、スカラーをかける場合、「1 をかける」と「-1 をかける」の独立な２つの操作になる。それでは、２次のベクトルを別の２次のベクトルに変換するため、２ｘ２の行列をかける場合はどうなるか。結論としは、独立な操作は単位行列と３つのパウリ行列（うち１つは複素数を含む）であり、実数だけだと４種、複素数を許せば８種の操作ができる。

「三次元の数」の話となると、話が難しくなる。３階のテンソルと考えてもいいし、３次元のベクトルと考えてもいい。

　さらに、対称性と保存則には深い関係が有るらしい。