令和７年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選抜課題

課題（数学）

解答例

解答例：数学

問 1 (1) $x^3-3x^2-3x+1=0$

$x=-1$ が解なので，因数分解して残りの 2 次方程式を解くと，他の 2 つの解が $x=2\pm\sqrt{3}$ と得られる。

(2) $\sin x+\sqrt{3}\cos x=1 \qquad (0\leqq x<2\pi)$
三角関数の合成を用いて，$2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=1$，として求めると，$x=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{11}{6}\pi$。

(3) $\log_{\frac{1}{2}}(x-2)+\log_{\frac{1}{2}}(x-9)=-3$

$$(x-2)(x-9)=\left(\frac{1}{2}\right)^{(-3)}, \quad 9<x$$

を解いて $x=10$。

問 2 数列 $\{a_n\}$ について

$$a_{n+1}+\alpha=2(a_n+\alpha) \quad \alpha=3$$

と変形して求めると，$a_n=2^{n-1}\times 7-3$。

問 3 (1) $\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(7,-1,-5)$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(4,-2,6)$，$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=(2,-6,4)$ となり，必要な内積を計算すると，

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=28+2-30=0$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=14+6-20=0$$

と，どちらも 0 となるのでどちらの角度も $\dfrac{\pi}{2}$ とわかる。
(2) $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ を高さにとることができて高さは $5\sqrt{3}$，三角形 BCD の面積が $10\sqrt{3}$ となるので体積は 50 となる。

別解:

平行六面体の体積を V_0 とすると

$$V_0 = \left|\left(\overrightarrow{\mathrm{BA}} \times \overrightarrow{\mathrm{BC}}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{BD}}\right| = \left|\begin{array}{ccc} 7 & -1 & -5 \\ 4 & -2 & 6 \\ 2 & -6 & 4 \end{array}\right| = 300$$

であり, 四面体の体積は $\dfrac{V_0}{6} = 50$ となる。

問 4

$$\begin{aligned} \gamma - \alpha &= 2\sqrt{3} - 2 - (2\sqrt{3} + 2)i, \qquad \beta - \alpha = -2 - 2i \\ \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} &= (1 + \sqrt{3}i) = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) \end{aligned}$$

となるので，$\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{\pi}{3}$。

問 5 (1)

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{10} = \frac{3}{20}$$

(2) E_1: B の袋からくじを引く。 E_2: あたりが出る。

$$P = P(E_1|E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{1/2 \times 2/10}{3/20} = \frac{2}{3}$$

問 6 (1) 2 回微分して $f'(x) = 3x^2 + 6ax + 2b = 3(x+2)x$ より $a = 1$，$b = 0$。積分の式で $x = 0$ として $c = 0$。

(2) 接点の x 座標を s とおくと，接線の方程式は

$$y - f(s) = f'(s)(x - s)$$

これが点 $D(1, d)$ を通るので

$$d - f(s) = f'(s)(1 - s)$$

これは s の 3 次方程式で $g(s) = -\dfrac{d}{2}$，ただし $g(s) = s^3 - 3s$ と書けるので，$g(s) = -\dfrac{d}{2}$ が異なる 3 点で交わる条件を求めると，$g'(s) = 0$ の解が $s = \pm 1$ となることから,

$g(-1) < -\dfrac{d}{2} < g(1)$ より $-4 < d < 4$ を得る。

問 7 (1)　素直に微分して

$$f'(x) = ae^{ax}\sin bx + be^{ax}\cos bx$$

(2)　求め方としては，部分積分を 2 回繰り返すと結局同じ関数形の積分になることを見てこれを利用する方法と，(1) より $e^{ax}\sin bx$ や $e^{ax}\cos bx$ について微分を繰り返しても，$e^{ax}\sin bx$ や $e^{ax}\cos bx$ の形のみが出てくることから，C，C_1，C_2 を定数として

$$F(x) = C_1 e^{ax}\sin bx + C_2 e^{ax}\cos bx + C$$

と置いて，C_1，C_2 をうまく選べば，これを微分すると $f(x)$ となる，という条件を満たせることを利用する方法がある。ここでは (1) を直接利用できる後者の方法をとると，

$$F'(x) = (C_1 a - C_2 b)e^{ax}\sin bx + (C_2 a + C_1 b)e^{ax}\cos bx$$

より，$(C_1 a - C_2 b) = 1$ および $(C_2 a + C_1 b) = 0$ を解いて

$$F(x) = \frac{1}{a^2+b^2}(ae^{ax}\sin bx - be^{ax}\cos bx) + C$$

ただし C は積分定数となる。

別解:

$$\begin{aligned}
\int e^{ax}\sin bx dx &= \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx dx \\
&= \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos bx - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin bx dx
\end{aligned}$$

$$\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)F(x) = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos bx + C'$$

$$F(x) = \frac{1}{a^2+b^2}(ae^{ax}\sin bx - be^{ax}\cos bx) + C$$