令和７年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選抜課題

課題論述（物理学）

課題I, II

(12:30〜17:30)

注意事項

1. この冊子は，監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 問題冊子に印刷または製本の不具合がある場合は，手を上げて申し出て下さい。
3. 課題 I および課題 II の問題すべてに解答してください。
4. 解答用紙は課題ごとに分けて使用してください。解答用紙は何枚使用しても構いません。全ての解答用紙に受験番号を必ず記入して下さい。
5. 携帯電話やスマートフォン等の電子機器はすべて電源を切り，カバンにしまってください。
6. その他，監督者の指示に従って下さい。

[I]

質量 m の小球を使って剛体を運動させることを考えよう。この問題では図1のように辺の長さが R の正方形から, 半径が R で中心角が $\dfrac{\pi}{2}$ の扇型を切りとった断面の形状をもつ剛体Aを考える。剛体Aの厚みは w で密度 ρ は一様である。以下の問いに答えなさい。

最初は剛体Aが図1のように水平面に固定されている場合を考える。水平面も剛体の円弧面もなめらかで摩擦は考えなくて良い。小球は $z=0$ の面内を運動するとして xy 方向の運動だけを考える。水平方向を x 軸，鉛直上方を y 軸正の向きにとり，重力加速度の大きさを g とする。小球は図1の左から速度 $(v_x, v_y) = (v_0, 0)$ で点Oまで水平面を運動したのち，円弧面をのぼり始める。小球が円弧上にある間の位置は，小球と円弧の中心を結ぶ線が鉛直方向となす角度 θ を使って定めることができる。次の設問に答えなさい。

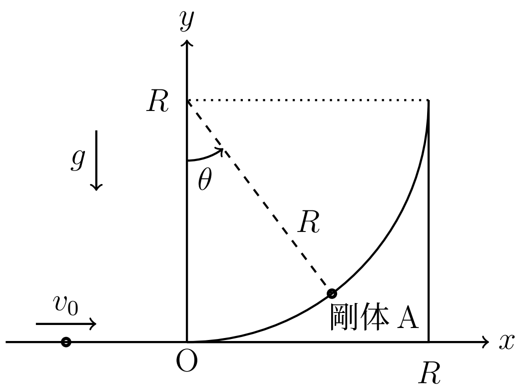

図1

問1 円弧面上にある小球の位置は $(x, y) = (R\sin\theta, R - R\cos\theta)$ と表される。速度は単位時間あたりの変位なので，位置座標を時刻 t で微分したものに他ならない。円弧上にある小球の速度 (v_x, v_y) を R, θ, $\dot{\theta} = \dfrac{d\theta}{dt}$ を用いて表しなさい。

問2 小球の力学的エネルギーが保存することを利用し，$\dot{\theta}$ を g と R, v_0, θ を用いて表しなさい。

問3 円弧上を速さ v で運動する質量 m の小球の向心力の大きさは $m\dfrac{v^2}{R}$ と表せることを使って，小球に働いている力 $\vec{F} = (F_x, F_y)$ を m, g, R, v_0, θ を用いて表しなさい。

次に水平面がなめらかで剛体 A が摩擦なく水平に動ける場合を考える。図 2 に示すように剛体 A の左端の x 座標 X，小球の円弧上での位置を表す角度 θ を使って，次の問いに答えなさい。小球が剛体 A と接触する前の速さは，小球が v_0，剛体 A が 0 である。

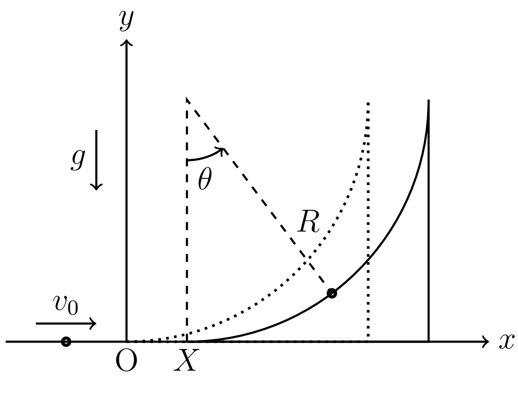

図 2

問 4 小球の座標 (x, y) を X, R, θ を用いて表しなさい。

問 5 小球の質量を m, 剛体 A の質量を M として，接触中のそれぞれの運動量を M, m, R, X, $\dot{X} = \dfrac{dX}{dt}$, θ, $\dot{\theta}$ のうち必要なものを用いて表しなさい。

問 6 接触の前と接触中で小球と剛体の力学的エネルギーの和が保存していることを示す式を M, m, R, $\dot{X}$, θ, $\dot{\theta}$, v_0 を使って表しなさい。

問 7 小球が左から剛体 A の円弧上をのぼり，先端 $\left(\theta = \dfrac{\pi}{2}\right)$ に到達したのち，円弧から離れることなく円弧上を下り x 軸上を左側へと離れて行った。このときの小球が剛体 A の左から近づくときの速度 v_0 を m, M, R, g を使って表しなさい。

問 8 問 7 の条件で 小球が (a) 円弧上に乗った直後 $(0 < \theta \ll 1)$，(b) $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ をのぼっているとき，(c) 先端 $\left(\theta = \dfrac{\pi}{2}\right)$ に到達したとき，(d) $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ を下っているとき，(e) 剛体 A から離れる直前のそれぞれについて，剛体 A の速度 $\dot{X}$ を v_0, m, M を使って表しなさい。(注意: 答えは重力加速度 g を用いずに表すことができる。)

(次ページに続く)

今度は図 3 に示すように，剛体 A が点 J を支点として回転できるよう，ちょうつがいで固定した場合を考えよう。前問までと同様に小球は左から速度 v_0 で点 O に到達する。従って，剛体 A が傾き始める直前までは問 1 から問 3 で求めた結果をそのまま利用することができる。問 9 から問 12 までは剛体はまだ傾いていないとして以下の設問に答えなさい。

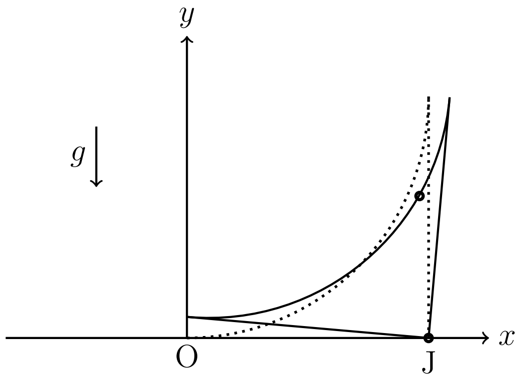

図 3

問 9 剛体 A の質量 M を ρ, R と w を使って表しなさい。

コラム「重心」

物体を大きさが無視できる $i = 1$ から n の小部分に分解して考えよう。それぞれの位置座標を (x_i, y_i)，質量を m_i とすると，この物体の質量は

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i = m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n$$

重心の座標は

$$x_{\mathrm{G}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} x_i m_i, \quad y_{\mathrm{G}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} y_i m_i$$

と表される。従って，剛体 A を y 軸に平行な線により細かく分割して和をとると，重心の x 座標は定積分

$$x_{\mathrm{G}} = \frac{1}{M}\int_0^R x\rho w\left(R - \sqrt{R^2 - x^2}\right)dx$$

によって表すことができる。図形の対称性より重心の y 座標は

$$y_{\mathrm{G}} = R - x_{\mathrm{G}}$$

であることが分かる。

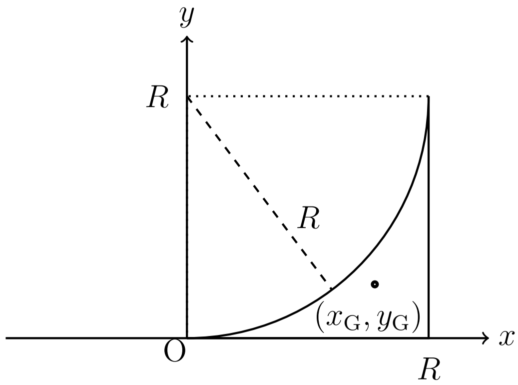

図 4

問 10 コラム「重心」を読み，剛体 A の重心の座標 $(x_{\mathrm{G}}, y_{\mathrm{G}})$ を R を使って表しなさい。答えは図 4 のデカルト座標系 (x, y) を用いること。

問 11 剛体 A に働いている複数の力のそれぞれについて，力の種類を述べなさい。またその内で大きさや向きが分かるものについては，力の x 成分, y 成分を求めなさい。

問 12 小球が図 1 の θ の位置にあり，剛体 A が静止している場合を考える。このとき水平面の垂直抗力による，点 J のまわりに剛体 A を回転させる力のモーメントを求めなさい。

問 12 で求めた力のモーメントは，剛体 A が傾く直前まで有効である。

問 13 問 12 の結果を用いて，剛体 A が傾き始める条件を求めなさい。剛体 A がわずかに傾いたあとすぐに元の位置に戻る場合も「傾き始めた」とみなしなさい。

問 14 ここまでの結果を用いて次の問いに答えなさい。

(a) 剛体 A が傾き始めるのは $\theta > \dfrac{\pi}{4}$ に限られることを示しなさい。

(b) ${v_0}^2 = 2gR$ のとき (剛体 A が傾かなければ小球が先端で折り返してくるとき), 剛体 A を傾ける方向の力のモーメントがどのように変化するか論じなさい。

[II]

図 1 のように電気容量 C のコンデンサーと抵抗値 R の抵抗が電源と直列につながれた回路を考える。電源の電圧 $E(t)$ は任意に制御することができる。ただし，$E(t)$ は点 O を基準とした点 A の電位とする。

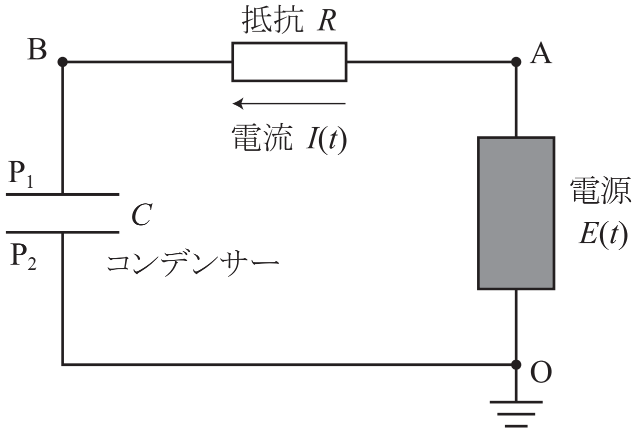

図 1

なお，必要なら以下の不等式は証明せずに用いてよい。
任意の正の実数 x に対して

$$e^{x} > 1 + x \qquad e^{-x} > 1 - x$$

$$\frac{1-e^{x}}{1+e^{x}} > -\frac{x}{2} \qquad \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} < \frac{x}{2}$$

問 1 電源の電圧を $E(t) = E_0$（E_0 は正の定数）となるよう設定し，電圧を加えてから十分時間がたった後の状態を考える。

(a) コンデンサーの極板 P_1 に蓄えられた電荷の量を答えなさい。

(b) コンデンサーに蓄えられている静電エネルギーの大きさを答えなさい。

(c) 抵抗で発生する単位時間あたりのジュール熱を答えなさい。

問 2 電源の電圧が時刻 t の関数として $E(t)$ と表される時間変化をする場合を考える。時刻 t においてコンデンサーの極板 P_1 に蓄えられた電荷の量を $q(t)$ とおく。

(a) 時刻 t におけるコンデンサーの両端の電圧 $V(t)$ を求めなさい。コンデンサーの両端の電圧は，点 O を基準とした点 B の電位で表すこと。

(b) 時刻 t において回路に流れる電流を $I(t)$ とおく。図 1 の A $\rightarrow$ B の向きを電流 $I(t)$ の正の向きと定義すると，コンデンサーに流れ込む電流が単位時間あたりの $q(t)$ の増加量となることから，$\dfrac{dq(t)}{dt} = I(t)$ が成立する。これを用いると

$$\frac{dq(t)}{dt} + k_1 q(t) = k_2 E(t) \tag{1}$$

の式を導くことができる。k_1，k_2 をそれぞれ C および R のうち必要なものを用いて表しなさい。

問 3 問 2(b) で得られた式 (1) を用いて，$E(t)$ が与えられたときの $q(t)$ を計算しよう。式 (1) は

$$\frac{d}{dt}\left(q(t)e^{k_1 t}\right) = k_2 E(t) e^{k_1 t} \tag{2}$$

と変形できることを，上式の左辺を具体的に微分することにより示しなさい。この問いに限り，k_1，k_2 を用いて答えてもよい。

(次ページに続く)

問 4 問 3 の結果を用いると，式 (2) の t を τ でおきなおした式

$$\frac{d}{d\tau}\left(q(\tau)e^{k_1\tau}\right) = k_2 E(\tau)e^{k_1\tau} \tag{3}$$

の両辺を τ で積分することで，与えられた $E(t)$ に対する $q(t)$ を求めることができる。時刻 $t = 0$ に電源の電圧を $E(t) = 0$ から $E(t) = E_0$（E_0 は正の定数）に瞬間的に変化させた。$t = 0$ ではコンデンサーに電荷は蓄えられていなかった。つまり，$q(0) = 0$ であった。

(a) 式 (3) を $\tau = 0$ から $\tau = t$ まで τ で積分することで，時刻 t ($t \geqq 0$) における $q(t)$ を求め，そのおおよその形をグラフに描きなさい。

(b) 時刻 t ($t \geqq 0$) における $I(t)$ を求め，そのおおよその形をグラフに描きなさい。

(c) 時刻 t ($t \geqq 0$) において，抵抗で発生する単位時間あたりのジュール熱 $P(t)$ を求めなさい。

(d) 時刻 $t = 0$ から時刻 $t = T$ までに抵抗で発生したジュール熱 $Q(T)$ は $P(t)$ を $t = 0$ から $t = T$ まで積分して得られる。$Q(T)$ を求め，さらに，極限値 $Q_\infty = \lim_{T\to\infty} Q(T)$ を求めなさい。

(e) 電源がする単位時間あたりの仕事は $I(t)E(t)$ で与えられるので，電源が $t = 0$ から $t = T$ までにした仕事 $W(T)$ は $I(t)E(t)$ を $t = 0$ から $t = T$ まで積分して得られる。$W(T)$ を求め，さらに，極限値 $W_\infty = \lim_{T\to\infty} W(T)$ を求めなさい。

(f) 電源がした仕事のうち，ジュール熱となった割合 $\dfrac{Q_\infty}{W_\infty}$ を求めなさい。

(g) ここまでの結果を用い，時刻 $t = 0$ で電圧を 0 から E_0 に瞬間的に変化させて以降，十分に時間がたつまでの間に，何のエネルギーがどのように使われたかを簡単に答えなさい。

問 5 電源の電圧をうまく制御して，どうすればコンデンサーの充電の際に発生するジュール熱を小さくすることができるかを考えよう。$t < 0$ において，$E(t) = 0$ であり，コンデンサーに電荷は蓄えられていなかった。$0 \leqq t \leqq T_0$ の間，電源の電圧 $E(t)$ を一次関数 $E(t) = a\dfrac{t}{CR} + b$（$a$，$b$ は正の定数）に従うように単調に増加させた。まず，このときの回路の様子を計算で求めよう。

(a) 時刻 t $(0 \leqq t \leqq T_0)$ における $q(t)$ を求めなさい。

(b) 時刻 t $(0 \leqq t \leqq T_0)$ における $I(t)$ を求めなさい。

(c) 時刻 $t = 0$ から時刻 $t = T_0$ までに抵抗で発生したジュール熱 Q を求めなさい。

時刻 $t = T_0$ において，コンデンサーには q_0（q_0 は正の定数）の電荷が蓄えられていた。すなわち，$q(T_0) = q_0$ であったとする。このとき，どのように a と b を定めれば抵抗で発生するジュール熱を小さくできるかを次の手順を踏んで考えよう。

(d) $q(T_0) = q_0$ となることを考慮して，b を a，q_0，C，R，T_0 を用いて表しなさい。

(e) (d) で得られた b を，(c) で得られた発生したジュール熱 Q の式に代入すると，Q は a の関数となる。Q の最小値 Q_{min}，および Q が最小値をとるときの a の値を求めなさい。また，この a に対応する b の値も求めなさい。

(f) Q が最小値 Q_{min} をとるとき，時刻 t $(0 \leqq t \leqq T_0)$ におけるコンデンサーの両端の電圧 $V(t)$ を求めなさい。

(g) Q が最小値 Q_{min} をとるとき，$t = 0$ から $t = T_0$ の間に電源がした仕事 W_{min} に対して，発生したジュール熱 Q_{min} の割合 $\dfrac{Q_{\mathrm{min}}}{W_{\mathrm{min}}}$ を求めなさい。また，$\dfrac{Q_{\mathrm{min}}}{W_{\mathrm{min}}}$ を T_0 の関数として，グラフのおおよその形を描きなさい。