

令和7年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選抜課題

課題論述（物理学）

課題I, II 解答例

解答例：課題I

出題の意図

力学的なエネルギーの保存，運動量の保存とその利用，および力のモーメントについての理解を確かめるとともに，微分積分の演算能力を確かめるための問題である。剛体の回転運動は高校での学習範囲外なので除いてある。

問1 与えられた位置座標を微分することにより $v_x = R\dot{\theta} \cos \theta$ ， $v_y = R\dot{\theta} \sin \theta$ が得られる。
ちなみに速さは $\sqrt{v_x^2 + v_y^2} = |R\dot{\theta}|$ である。

問2 力学的エネルギーの保存則により

$$\frac{m}{2}(R\dot{\theta})^2 + mgR(1 - \cos \theta) = \frac{m}{2}v_0^2 \quad (1)$$

が得られる。これを整理すると

$$\dot{\theta}^2 = \left(\frac{v_0}{R}\right)^2 - \frac{2g}{R} + \frac{2g}{R} \cos \theta \quad (2)$$

が得られる。従って

$$\dot{\theta} = \pm \sqrt{\left(\frac{v_0}{R}\right)^2 - \frac{2g}{R} + \frac{2g}{R} \cos \theta} \quad (3)$$

である。

問3 小球には重力 $\vec{F}_G = (F_x, F_y) = (0, -mg)$ の他に剛体 A からの垂直抗力 \vec{N} が半径方向に働いている。問題文に与えられているように向心力 (=半径方向の慣性力) の大きさは $m\frac{v^2}{R} = mR\dot{\theta}^2$ なので，半径方向の力の釣り合い

$$-N + mg \cos \theta + mR\dot{\theta}^2 = 0 \quad (4)$$

より，垂直抗力の大きさ

$$N = mg \cos \theta + mR\dot{\theta}^2 \quad (5)$$

$$= m \left(3g \cos \theta - 2g + \frac{v_0^2}{R} \right) \quad (6)$$

を求めることができる。向きを考えると

$$\vec{N} = N(-\sin \theta, \cos \theta) \quad (7)$$

$$= m \left(3g \cos \theta - 2g + \frac{v_0^2}{R} \right) (-\sin \theta, \cos \theta) \quad (8)$$

が得られる。

従って、小球にはたらく力は

$$\vec{F} = \vec{F}_G + \vec{N} = (0, -mg) + m \left(3g \cos \theta - 2g + \frac{v_0^2}{R} \right) (-\sin \theta, \cos \theta) \quad (9)$$

である。

(補足)

この設問では垂直抗力の大きさが与えられていたが、小球の運動方程式

$$m\vec{a} = \vec{F}_G + \vec{N} \quad (10)$$

から垂直抗力を求めることもできる。小球の速度を時刻 t で微分して加速度 \vec{a} を計算すると

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = R\ddot{\theta} \cos \theta - R\dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (11)$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = R\ddot{\theta} \sin \theta + R\dot{\theta}^2 \cos \theta \quad (12)$$

が得られる。これを式 (10) に代入すると

$$N = mg \cos \theta + mR\dot{\theta}^2 \quad (13)$$

が得られる。同様に円弧に沿った小球の加速度も

$$\frac{d}{dt}v_\theta = R\ddot{\theta} = -g \sin \theta \quad (14)$$

も求めることができる。

問 4

$$(x, y) = (X + R \sin \theta, R - R \cos \theta) \quad (15)$$

問 5 小球の運動量は $(m\dot{X} + mR\dot{\theta} \cos \theta, mR\dot{\theta} \sin \theta)$ と表せる。また剛体 A の運動量は $(M\dot{X}, 0)$ と表せる。

問 6 小球と剛体 A の運動エネルギー、小球の重力エネルギーを考えると

$$\frac{m}{2} \left[(\dot{X} + R\dot{\theta} \cos \theta)^2 + R^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta \right] + \frac{M}{2} \dot{X}^2 + mgR(1 - \cos \theta) = \frac{m}{2} v_0^2 \quad (16)$$

が導かれる。

問7 全運動量の x 成分が保存することから

$$(m + M) \dot{X} + mR\dot{\theta} \cos \theta = mv_0 \quad (17)$$

が得られる。小球が $\theta = \frac{\pi}{2}$ にあるときは、

$$(m + M) \dot{X} = mv_0 \quad (18)$$

である。またエネルギー保存則に $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\dot{\theta} = 0$ を代入すると

$$\frac{m + M}{2} \dot{X}^2 + mRg = \frac{m}{2} v_0^2 \quad (19)$$

が得られる。運動量保存則を使って \dot{X} を消去すると

$$v_0^2 = \frac{2Rg(M + m)}{M} \quad (20)$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2Rg(M + m)}{M}} \quad (21)$$

が得られる。

問8 運動量保存則とエネルギー保存則を用いれば \dot{X} と $\dot{\theta}$ を求めることができる。計算を容易にするために、 \dot{X} を消去した式を導こう。式 (17) の両辺を自乗し、 $2(m + M)$ で割ると

$$\frac{m + M}{2} \dot{X}^2 + mR\dot{X}\dot{\theta} \cos \theta + \frac{1}{2} \left(\frac{m^2}{m + M} \right) R^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta = \frac{m^2}{2(m + M)} v_0^2 \quad (22)$$

が得られる。これをエネルギー保存則に代入すると

$$\frac{M}{m + M} R^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + R^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + 2Rg(1 - \cos \theta) = \frac{M}{m + M} v_0^2 \quad (23)$$

が得られる。さらに式 (20) を整理して得られる式

$$2Rg = \frac{M}{M + m} v_0^2 \quad (24)$$

を代入すると

$$R^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + \frac{m + M}{M} R^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta = v_0^2 \cos \theta \quad (25)$$

$$(R\dot{\theta})^2 = v_0^2 \cos \theta \left(1 + \frac{m}{M} \sin^2 \theta \right)^{-1} \quad (26)$$

が得られる。この式に θ を代入すると $|R\dot{\theta}|$ が求まる。運動量保存則から

$$\dot{X} = \frac{m}{M+m} (v_0 - R\dot{\theta} \cos \theta) \quad (27)$$

が得られるので、これに $R\dot{\theta}$ と θ を代入すると剛体 A の速度 \dot{X} が求まる。

(a) $\theta = 0$ のときのぼるとき $R\dot{\theta} = v_0$ なので $\dot{X} = 0$ となる。

(b) $\theta = \frac{\pi}{3}$ のときのぼるとき $R\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2M}{4M+3m}} v_0$ なので

$$\dot{X} = \frac{m}{m+M} v_0 \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2M}{4M+3m}} \right) \quad (28)$$

となる。

(c) $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき $R\dot{\theta} = 0$ なので $\dot{X} = \frac{m}{m+M} v_0$ となる。

(d) $\theta = \frac{\pi}{3}$ で下るとき $R\dot{\theta} = -\sqrt{\frac{2M}{4M+3m}} v_0$ なので

$$\dot{X} = \frac{m}{m+M} v_0 \left(1 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2M}{4M+3m}} \right) \quad (29)$$

となる。

(e) $\theta = 0$ で下るとき $R\dot{\theta} = -v_0$ なので $\dot{X} = \frac{2m}{M+m} v_0$ となる。

剛体 A は徐々に加速して小球が離れる直前に、弾性衝突したときと同じ速度になる。この問題では重力が小球と剛体 A の間にはたらく反発力の役割を果たしている。

問 9 正方形の面積 R^2 から $1/4$ 円の面積 $\frac{\pi R^2}{4}$ を差し引き、厚み w との積を計算すると体積 $V = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) R^2 w$ が求められる。密度は ρ で一定なので $M = \rho \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) R^2 w$ が得られる。

剛体 A の質量は定積分

$$M = \int_0^R \rho w (R - \sqrt{R^2 - x^2}) dx = \rho w R^2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \quad (30)$$

を $x = R \sin \theta$ で置換することにより積分することもできる。

問 10 与えられた積分を実行すると求めることができる。

$$x_G = \frac{1}{M} \int_0^R \rho x w (R - \sqrt{R^2 - x^2}) dx \quad (31)$$

$$= \frac{1}{\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) R^2} \int_0^R x (R - \sqrt{R^2 - x^2}) dx \quad (32)$$

$$= \frac{1}{\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) R^2} \left[\frac{Rx^2}{2} + \frac{1}{3} (R^2 - x^2)^{3/2} \right]_0^R \quad (33)$$

$$= \frac{2}{12 - 3\pi} R \quad (34)$$

$$y_G = R - x_G \quad (35)$$

問 11 剛体 A には (a) 重力, (b) 小球におよぼす垂直抗力の反作用, (c) 水平面から受ける垂直抗力, (d) ちょうつがいによる剛体 A の角を止める力がはたらいている。(a) と (b) の力の大きさと向きは

$$\vec{F}_{(a)} = (0, -Mg) \quad (36)$$

$$\vec{F}_{(b)} = N(\sin \theta, -\cos \theta) \quad (37)$$

(c) と (d) の力のそれぞれの向きと大きさは分からない。

(補足)

(c) と (d) の力の和は剛体 A にはたらく力がつり合っている (全ての力の和が 0 である) ことから分かる。

$$\vec{F}_{(c)} + \vec{F}_{(d)} = -\vec{F}_{(a)} - \vec{F}_{(b)} = (-N \sin \theta, Mg + N \cos \theta) \quad (38)$$

水平面が滑らかなため (c) の力は y 方向を向いていることを考えると

$$\vec{F}_{(c)} = (0, Mg + N \cos \theta - f_y) \quad (39)$$

$$\vec{F}_{(d)} = (-N \sin \theta, f_y) \quad (40)$$

のように x 成分についてはそれぞれの大きさを求めることができる。しかし f_y の大きさは不定である。

問 12 剛体 A が静止しているときは力のモーメントの和が 0 である。力のモーメントは力とうでの長さの積で, うでの長さは回転中心 (点 J) から力の作用線までの距離である。従ってちょうつがいによる剛体の角を止める力 ($\vec{F}_{(d)}$) は力のモーメントを持たない。このため (a) 重力, (b) 小球におよぼす垂直抗力の反作用, (c) 水平面からの

垂直抗力による力のモーメントの和が0という条件が得られる。

$\vec{F}_{(a)}$ による力は重心にかかると考えて良い。従って作用線は重心を通る y 軸に平行である。従って回転中心 (点 J) から作用線までの距離は $R - x_G$ であり、力のモーメントは

$$\mathcal{M}_{(a)} = (R - x_G)Mg = \frac{2}{(4 - \pi)} \left(\frac{5}{3} - \frac{\pi}{2} \right) RMg \quad (41)$$

となる。この力は剛体 A を反時計周りに回転させる方向にはたらく。

$\vec{F}_{(b)}$ の作用点は小球の位置で、作用線は方程式

$$y = -\frac{1}{\tan \theta} (x - R \sin \theta) + R(1 - \cos \theta) \quad (42)$$

と表すことができる。回転の中心である点 J から作用線までの距離 (=うでの長さ) は

$$\ell = \sqrt{2}R \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) \quad (43)$$

である。距離は常に正であるが、ここでは力のモーメントを求めるのが目的なので、作用線が回転中心より上にあるときを正、下にあるときは負となるよう符号をつけておいた。剛体 A を傾ける方を正となるように力のモーメントを定義すると

$$\mathcal{M}_{(b)} = \sqrt{2}R \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) N \quad (44)$$

$$= \sqrt{2}Rm \left(\frac{v_0^2}{R} - 2g + 3g \cos \theta \right) \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) \quad (45)$$

が得られる。

従って水平面からの垂直抗力による力のモーメントは

$$\mathcal{M}_{(c)} = \mathcal{M}_{(a)} - \mathcal{M}_{(b)} \quad (46)$$

$$= \frac{2}{(4 - \pi)} \left(\frac{5}{3} - \frac{\pi}{2} \right) RMg - \sqrt{2}Rm \left(\frac{v_0^2}{R} - 2g + 3g \cos \theta \right) \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) \quad (47)$$

である。垂直抗力は剛体 A を時計回りに回転させるようにはたらくはずなので、 $\mathcal{M}_{(c)} \geq 0$ でなくてはならない。

問 13 問 12 で求めた $\mathcal{M}_{(c)}$ が負になると剛体 A は静止できなくなる。これを式に表すと

となると

$$\frac{2}{(4-\pi)} \left(\frac{5}{3} - \frac{\pi}{2} \right) RMg < \sqrt{2}mR \left(\frac{v_0^2}{R} - 2g + 3g \cos \theta \right) \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) \quad (48)$$

となる。

問 14 (a) 剛体の重力による力のモーメントは剛体の傾きを止める方向に働き一定である (式 (41) を参照のこと)。従って小球による力のモーメントが $\mathcal{M}_{(b)} > 0$ のときだけ、剛体が傾く可能性がある。式 (45) より $\theta > \frac{\pi}{4}$ のときだけこの可能性があることが示せる。

(b) 与えられた条件のとき小球による力のモーメントは

$$\mathcal{M}_{(b)} = 3\sqrt{2}mRg \cos \theta \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) \quad (49)$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{2}mRg \left[\sin \left(2\theta - \frac{\pi}{4} \right) - \sin \frac{\pi}{4} \right] \quad (50)$$

となる。従って剛体を回転させる力のモーメントは $\theta = \frac{\pi}{4}$ と $\frac{\pi}{2}$ で $\mathcal{M}_{(b)} = 0$ で、 $\theta = \frac{3\pi}{8}$ で最大となる。傾き始めるかどうかは、問 13 で求めた条件に $\theta = \frac{3\pi}{8}$ を代入して確認することができる。

解答例：課題II

出題の意図

抵抗とコンデンサーの直列回路において、電源の電圧を変化させたときにどのようにコンデンサーが充電されていくかに関して、数学を用いて求めていく。高校の物理では、充電の細かな過程を扱わないが、キルヒホッフの法則と微分積分の計算を用いれば充電される際の時間変化も求めることができる。電気回路に関する基礎知識と微分積分の計算能力を試験するための問題である。

問1 コンデンサーに蓄えられる電荷とエネルギーを求める基本的な問題である。電気回路に関する基礎的な知識を問う。

- (a) コンデンサーに蓄えられる電荷と電圧の関係から $q = \boxed{CE_0}$ が得られる。
- (b) コンデンサーに蓄えられる静電エネルギーの公式より、 $U = \boxed{\frac{C}{2}E_0^2}$ となる。
- (c) 十分時間がたつと電流が流れないので、単位時間あたりに発生するジュール熱は $\boxed{0}$ である。

問2 キルヒホッフの法則を用いて電圧の関係から、コンデンサーに蓄えられる電荷の量 $q(t)$ に関する方程式を導く問題である。微分方程式と呼ばれる $q(t)$ と $\frac{dq(t)}{dt}$ を含む方程式が導かれる。電気回路に関する基礎的な知識を問う。

- (a) コンデンサーに蓄えられる電荷と電圧の関係から $V(t) = \boxed{\frac{q(t)}{C}}$ となる。
- (b) キルヒホッフの法則より、 $E(t) = RI(t) + \frac{q(t)}{C}$ 。 $I(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ より
 $R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = E(t)$ 。すなわち、 $\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{RC} = \frac{1}{R}E(t)$ 。
よって、 $k_1 = \boxed{\frac{1}{CR}}$ 、 $k_2 = \boxed{\frac{1}{R}}$ である。

問3 微分方程式を解くための準備としての式変形を示す。合成関数の微分など微分の計算が行えるかを検査する。

$\frac{d}{dt}(q(t)e^{k_1t}) = k_2E(t)e^{k_1t}$ の左辺を計算すると、 $\frac{d}{dt}(q(t)e^{k_1t}) = \frac{dq(t)}{dt}e^{k_1t} + k_1q(t)e^{k_1t}$
これを左辺に代入し、両辺に e^{-k_1t} をかけると、 $\frac{dq(t)}{dt} + k_1q(t) = k_2E(t)$ となる。
よって示された。

問4 コンデンサーが充電されていない状態から、電源の電圧を一瞬で上昇させて一定の状態にしたときのコンデンサーの充電する過程を微分方程式から計算する。誘導に

従って積分の計算や極限値の計算ができるかを検査する。また、電気回路におけるエネルギー保存則を理解できているかを検査する。

(a) $\frac{d}{d\tau} (q(\tau)e^{k_1\tau}) = k_2E(\tau)e^{k_1\tau}$ において、 $t \geq 0$ では $E(t) = E_0$ とできる。

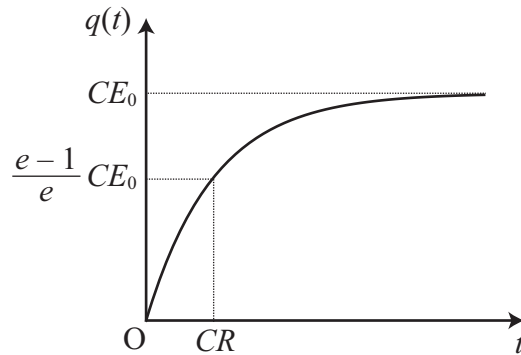
よって、 τ で $\tau = 0$ から $\tau = t$ まで積分すると、

$$q(t)e^{k_1t} - q(0)e^{k_1 \cdot 0} = k_2E_0 \int_0^t e^{k_1\tau} d\tau$$

$$\text{よって、} q(t) = k_2E_0e^{-k_1t} \frac{1}{k_1} (e^{k_1t} - 1) = \frac{k_2E_0}{k_1} (1 - e^{-k_1t})$$

k_1, k_2 に値を代入すると、 $q(t) = \boxed{CE_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{CR}}\right)}$ が得られる。

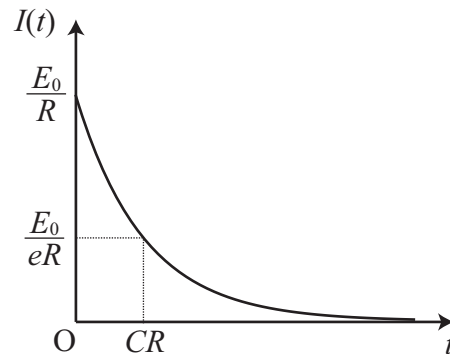
グラフは以下のようなになる。



(b) 電流は $I(t) = \frac{1}{R} \left(E_0 - \frac{q(t)}{C} \right) = \frac{1}{R} \left[E_0 - E_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{CR}} \right) \right] = \boxed{\frac{E_0}{R} e^{-\frac{t}{CR}}}$ となる。

あるいは、問4(a)で求めた $I(t)$ を微分して、 $I(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ から求めてもよい。

グラフは以下のようなになる。



(c) 電力を求めると、 $P(t) = RI(t)^2 = \boxed{\frac{E_0^2}{R} e^{-\frac{2t}{CR}}}$ となる。

(d) 電力 $P(t)$ を積分してジュール熱を求める。具体的に計算すると

$$Q(T) = \int_0^T P(t) dt = \frac{E_0^2}{R} \frac{CR}{2} \left(1 - e^{-\frac{2T}{CR}} \right) = \boxed{\frac{CE_0^2}{2} \left(1 - e^{-\frac{2T}{CR}} \right)}$$
 となる。

また、極限値は、 $T \rightarrow \infty$ で $e^{-\frac{2T}{CR}} \rightarrow 0$ であることを考えて

$$\lim_{T \rightarrow \infty} Q(T) = \boxed{\frac{CE_0^2}{2}}$$
 と求められる。

(e) 定義に従って仕事を計算すると,

$$W(T) = \int_0^T E_0 \frac{E_0}{R} e^{-\frac{t}{CR}} dt = \frac{E_0^2}{R} CR \left(1 - e^{-\frac{T}{CR}}\right) = \boxed{CE_0^2 \left(1 - e^{-\frac{T}{CR}}\right)}$$

また, 極限值は, 同様に $T \rightarrow \infty$ で $e^{-\frac{T}{CR}} \rightarrow 0$ であることを考えて

$$\lim_{T \rightarrow \infty} W(T) = \boxed{CE_0^2}$$
 と求められる。

(f) 上で求めた値より $\frac{Q_\infty}{W_\infty} = \boxed{\frac{1}{2}}$ が得られる。

(g) 電源がした仕事 $W_\infty = CE_0^2$ のうち半分の $\frac{CE_0^2}{2}$ は最終的にコンデンサーに静電エネルギーとして蓄えられ, 残り半分の $Q_\infty = \frac{CE_0^2}{2}$ は抵抗でジュール熱となった。

問5 コンデンサーが充電されていない状態から, 電源の電圧を一定の割合で上昇させたときにコンデンサーが充電される過程を微分方程式から計算する。誘導に従って現象を理解する能力, 複雑な微積分や指数関数の計算を実行する計算力, 回路におけるエネルギー保存則の理解を問う。

(a) $\frac{d}{d\tau} (q(\tau)e^{k_1\tau}) = k_2 E(\tau)e^{k_1\tau}$ において, $0 \leq t \leq T_0$ では $E(t) = a\frac{t}{CR} + b$ として τ で $\tau = 0$ から $\tau = t$ まで積分すると,

$$q(t)e^{k_1 t} - q(0)e^{k_1 \cdot 0} = k_2 \int_0^t \left(a\frac{\tau}{CR} + b\right) e^{k_1\tau} d\tau. \text{ よって,}$$

$$q(t) = k_2 e^{-k_1 t} \left[\frac{1}{k_1} \left(a\frac{t}{CR} + b\right) e^{k_1 t} - \frac{1}{k_1} b - \int_0^t \frac{1}{k_1} \frac{a}{CR} e^{k_1\tau} d\tau \right]$$

$$= \frac{k_2}{k_1} e^{-k_1 t} \left[\left(a\frac{t}{CR} + b\right) e^{k_1 t} - b - \frac{a}{k_1 CR} (e^{k_1 t} - 1) \right]$$

$$= \frac{k_2}{k_1} \left[a\frac{t}{CR} - \left(\frac{a}{k_1 CR} - b\right) (1 - e^{-k_1 t}) \right]$$

$$k_1, k_2 \text{ を代入すると } q(t) = \boxed{C \left[a\frac{t}{CR} + (b-a) \left(1 - e^{-\frac{t}{CR}}\right) \right]}$$
 となる。

(b) $I(t) = \frac{1}{R} \left(E(t) - \frac{q(t)}{C} \right)$ より

$$I(t) = \frac{1}{R} \left\{ a\frac{t}{CR} + b - \left[a\frac{t}{CR} + (b-a) \left(1 - e^{-\frac{t}{CR}}\right) \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{R} \left[a \left(1 - e^{-\frac{t}{CR}}\right) + b e^{-\frac{t}{CR}} \right] = \boxed{\frac{1}{R} \left[a + (b-a) e^{-\frac{t}{CR}} \right]}$$
 と求められる。

あるいは, 問5(a)で求めた $I(t)$ を微分して, $I(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ から求めてもよい。

(c) 発生するジュール熱 Q は

$$Q = \int_0^{T_0} RI(t)^2 dt$$

$$= \frac{1}{R} \int_0^{T_0} \left[a^2 + 2a(b-a)e^{-\frac{t}{CR}} + (b-a)^2 e^{-\frac{2t}{CR}} \right] dt$$

$$= \frac{1}{R} \left[a^2 T_0 + 2aCR(b-a) \left(1 - e^{-\frac{T_0}{CR}}\right) + (b-a)^2 \frac{CR}{2} \left(1 - e^{-\frac{2T_0}{CR}}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{R} \left\{ a^2 T_0 + (b-a)CR \left(1 - e^{-\frac{T_0}{CR}}\right) \left[2a + \frac{1}{2}(b-a) \left(1 + e^{-\frac{T_0}{CR}}\right) \right] \right\}$$

と得られる。

- (d) (a) で得られた $q(t)$ に $t = T_0$ を代入すると $q(T_0) = C \left[a \frac{T_0}{CR} + (b-a) \left(1 - e^{-\frac{T_0}{CR}}\right) \right]$ となる。

$$q(T_0) = q_0 \text{ より整理すると, } b = \frac{T_0 \frac{q_0 R}{T_0} - a}{CR \left(1 - e^{-\frac{T_0}{CR}}\right)} + a \text{ となる。}$$

- (e) (d) より $b - a = \frac{T_0 \frac{q_0 R}{T_0} - a}{CR \left(1 - e^{-\frac{T_0}{CR}}\right)}$ であるので, これを代入すると

$$Q = C \left\{ a^2 \frac{T_0}{CR} + \frac{T_0}{CR} \left(\frac{q_0 R}{T_0} - a \right) \left[2a + \frac{T_0}{2CR} \left(\frac{q_0 R}{T_0} - a \right) \frac{1 + e^{-\frac{T_0}{CR}}}{1 - e^{-\frac{T_0}{CR}}} \right] \right\} \text{ となる。}$$

$$\text{簡単のため, } \kappa = \frac{1 + e^{-\frac{T_0}{CR}}}{2 \left(1 - e^{-\frac{T_0}{CR}}\right)}, \quad \tau = \frac{T_0}{CR}, \quad \alpha = \frac{q_0 R}{T_0} \text{ とおくと,}$$

$$Q = C \{ a^2 \tau + \tau (\alpha - a) [2a + \tau \kappa (\alpha - a)] \}$$

$$= C [(\tau^2 \kappa - \tau) a^2 + (2\tau \alpha - 2\tau^2 \kappa \alpha) a + \tau^2 \kappa \alpha^2]$$

$$= C(\tau^2 \kappa - \tau)(a - \alpha)^2 + C\tau \alpha^2 \text{ と平方完成できる。}$$

$$\text{二次の係数は } \tau^2 \kappa - \tau = \tau \left(\tau \frac{1 + e^{-\tau}}{2(1 - e^{-\tau})} - 1 \right) \text{ となる。}$$

$\tau > 0$ であることと問題で与えられた不等式より, $\frac{1 + e^{-\tau}}{1 - e^{-\tau}} > \frac{2}{\tau}$ であるので,

$\tau^2 \kappa - \tau > 0$ が言える。よって, Q の式は下に凸であり, $a = \alpha = \frac{q_0 R}{T_0}$ で最小

となる。 Q の最小値は, $Q_{\min} = C\tau \alpha^2 = \frac{q_0^2 R}{T_0}$ である。

また, このときの b は $b = \frac{T_0 \frac{q_0 R}{T_0} - \frac{q_0 R}{T_0}}{CR \left(1 - e^{-\frac{T_0}{CR}}\right)} + \frac{q_0 R}{T_0} = \frac{q_0 R}{T_0}$ と求められる。

- (f) 上で求めた a, b を代入すると

$$q(t) = C \left[\frac{q_0 R}{T_0} \frac{t}{CR} + \left(\frac{q_0 R}{T_0} - \frac{q_0 R}{T_0} \right) \left(1 - e^{-\frac{t}{CR}}\right) \right] = \frac{q_0}{T_0} t \text{ と求められる。}$$

すなわち, 一定の割合で充電される。

$$\text{コンデンサーの両端の電圧は } V(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{q_0}{CT_0} t \text{ と求められる。}$$

電源の電圧は $E(t) = \frac{q_0}{CT_0} t + \frac{Rq_0}{T_0}$ であるので, 抵抗での電圧降下が $\frac{Rq_0}{T_0}$ であることもわかる。

- (g) 電源がした仕事 W_{\min} は, 抵抗で発生したジュール熱 Q_{\min} とコンデンサーに蓄えられた静電エネルギー U の和になる。 $t = T_0$ において, コンデンサーに蓄えられた電荷は q_0 なので, 静電エネルギーは $U = \frac{q_0^2}{2C}$ と求められる。

よって、電源がした仕事は $W_{\min} = U + Q_{\min} = \frac{q_0^2}{2C} + \frac{Rq_0^2}{T_0} = \left(\frac{1}{2C} + \frac{R}{T_0} \right) q_0^2$ である。

この W_{\min} は $W = \int_0^{T_0} I(t)E(t)dt$ から求めてもよい。

求めた W_{\min} と Q_{\min} を用いて、 $\frac{Q_{\min}}{W_{\min}} = \frac{\frac{Rq_0^2}{T_0}}{\left(\frac{1}{2C} + \frac{R}{T_0} \right) q_0^2} = \frac{1}{1 + \frac{T_0}{2CR}}$ が得られる。

グラフは双曲線であり、 $T_0 = 0$ で 1、 $T_0 \rightarrow \infty$ で 0 に収束する。グラフは以下のようなになる。

