令和 2 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述　　数学

解答例

⟨ 略解 ⟩

問 1 (1) $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1+i}{2}$ となり, $z-\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}i$。ゆえに $\left|z-\dfrac{1}{z}\right|^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{5}{2}$。

(2) 両辺の対数 (底 3) を取ると、$(\log_3 x)^2<3+2\log_3 x$。この 2 次不等式を解くと, $-1<\log_3 x<3$ 。ゆえに $\dfrac{1}{3}<x<27$ 。

(3) $\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}-1$ より, $\cos^2\theta=\dfrac{1}{10}$。$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=-\dfrac{4}{5}$。
$\sin 2\theta=2\cos\theta\sin\theta=2\tan\theta\cos^2\theta=\dfrac{3}{5}$。$\tan 2\theta=\dfrac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=-\dfrac{3}{4}$。

(4)

$$\begin{aligned}\int x\cos x dx &= \int x\,(\sin x)'\,dx = x\sin x-\int (x)'\sin x\,dx = x\sin x-\int \sin x\,dx\\ &= x\sin x+\cos x+C\end{aligned}$$

(C は積分定数)

問 2 (1) $y'=(2\log x+1)x$。 したがって, $x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ で極小値 $-\dfrac{1}{2e}$ をとる。

(2) $y'=x^{-4}(x-3)e^x$。したがって, $x=3$ で極小値 $\dfrac{e^3}{27}$ をとる。

問 3 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,1,-3)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1,-3,2)$。このとき

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}=\frac{2-3-6}{\sqrt{14}\sqrt{14}}=-\frac{1}{2}$$

ゆえに $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおくと, $(3-1,2-2,a-1)=(2\alpha+\beta,\ \alpha-3\beta,\ -3\alpha+2\beta)$。
これから, $\alpha=\dfrac{6}{7}$, $\beta=\dfrac{2}{7}$ ゆえに $a=-1$ 。

問 4 A の表の枚数が 3 枚である確率は $\dfrac{1}{8}$, B の表の枚数が 2 枚以下となる確率は $\dfrac{1}{16}(1+{}_4\mathrm{C}_1+{}_4\mathrm{C}_2)=\dfrac{11}{16}$ 。A の表の枚数が 2 枚である確率は $\dfrac{3}{8}$, B の表の枚数が 1 枚以下となる確率は $\dfrac{1}{16}(1+{}_4\mathrm{C}_1)=\dfrac{5}{16}$。A の表の枚数が 1 枚である確率は $\dfrac{3}{8}$, B の表の枚数が 0 枚となる確率は $\dfrac{1}{16}$。以上より, A が勝つ確率は,

$$\frac{1}{8}\times\frac{11}{16}+\frac{3}{8}\times\frac{5}{16}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{16}=\frac{29}{128}$$

問 5 放物線と x 軸の交点は $x = 0,\, 2$，放物線と直線の交点は $x = 0,\, 2-a$，面積を分けるのは $0 < a < 2$ のとき。放物線と x 軸で囲まれた面積は

$$S = \int_0^2 \left(-x^2 + 2x\right)\, dx \;=\; \frac{4}{3}$$

であるのに対し，放物線と直線で囲まれた面積は,

$$\frac{S}{2} \;=\; \int_0^{2-a} \left(-x^2 + 2x - ax\right)\, dx \;=\; \frac{(2-a)^3}{6}$$

である。これから，$a = 2 - \sqrt[3]{4}$。

問 6 (1) $a_2 = \dfrac{5}{3},\ a_3 = \dfrac{7}{5},\ a_4 = \dfrac{9}{7}$ 。よって，一般項は $a_n = \dfrac{2n+1}{2n-1}$ と推定される。

(2) $n = 1$ においては推定した一般項は正しい。次に，$n = k$ において $a_k = \dfrac{2k+1}{2k-1}$ が成り立つと仮定すると，$a_{k+1} = 2 - \dfrac{2k-1}{2k+1} = \dfrac{2(k+1)+1}{2(k+1)-1}$ となるから，$n = k+1$ においても成り立つことが示される。以上より，推定した一般項が正しいことが示された。