令和４年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述　物理

課題I, II

(9:00-15:00)

注意事項

1. この冊子は，監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 問題冊子に印刷または製本の不具合がある場合は，手を上げて申し出て下さい。
3. 課題 I および課題 II の問題すべてに解答してください。
4. 解答用紙は課題ごとに分けて使用してください。解答用紙は何枚使用しても構いません。全ての解答用紙に受験番号を必ず記入して下さい。
5. 携帯電話やスマートフォン等の電子機器はすべて電源を切り，カバンにしまってください。
6. その他，監督者の指示に従って下さい。

[I]

図 1 のように，エレベータ内に，質量の無視できる自然長 L，ばね定数 k のばねがつり下げられている。エレベータ内で鉛直上向きを正として z 軸を考える。天井から鉛直下向きに L だけ下がった位置を座標原点 O とする。（原点 O はエレベータとともに動くものとする。）ばねの先端に質量 m の小球を取り付ける。小球の時刻 t での位置を $z(t)$ と表す。最初，エレベータは動いておらず，小球はつり合いの位置 $z = z_0$ で静止しており，これを「最初の状態」とする。重力加速度の大きさを g とし，空気抵抗は無視でき，小球は鉛直方向のみに運動し，エレベータの天井や床に衝突することはないものとして，以下の問いに答えなさい。

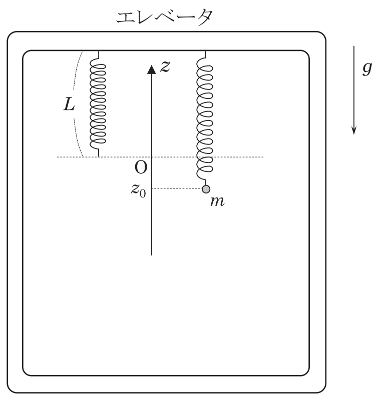

図 1

問 つり合いの位置 z_0 を求めなさい。

これ以後の問題 [I]-A〜[I]-D で考える運動は全て，上記の「最初の状態」から始まるものとする。

[I]-A

「最初の状態」から鉛直方向にわずかに離れた位置 $z = z_1$ に小球を移動させ，時刻 $t = 0$ において静かに放した。

問 1 小球の加速度を a とする。小球に対して成り立つ運動方程式を m，k，z，a，g のうち必要な記号を用いて表しなさい。

加速度 a は，z（$= z(t)$）の第 2 次導関数（2 階微分）$\dfrac{d^2z}{dt^2}$ と等しい。また，小球の速度は，z の第 1 次導関数 $\dfrac{dz}{dt}$ と等しい。一般に，第 2 次導関数 $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ が定数 ω，x_0 に対して，方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2(x - x_0) \tag{1}$$

を満たす場合，この方程式の解は，定数 A，B を用いて，

$$x(t) = x_0 + A\cos\omega t + B\sin\omega t \tag{2}$$

で与えられ，単振動を表すことが知られている。

問 2 前問の運動方程式を式 (1) のように変形し，ω を求めなさい。ただし，$\omega > 0$ とする。また，振動の周期 T を求めなさい。

問 3 $t = 0$ における小球の位置と速度に注目して，$z(t)$ を z_0，z_1，ω，t を用いて表しなさい。

[I]-B

「最初の状態」の後，時刻 $t=0$ からエレベータが鉛直上方に一定の加速度 α_0 で移動する場合を考える。

問 1 時刻 $t=0$ 以降のある時刻 t に，エレベータとともに移動する観測者が小球の運動を観測した場合，小球に対して成り立つ運動方程式を表しなさい。

問 2 前問の運動方程式を解き，小球の時刻 t での位置 $z(t)$ を求めなさい。

問 3 エレベータのみの質量を M とする。前問で求めた小球の位置（運動）を考慮した上で，エレベータが等加速度運動するために，エレベータに加えるべき外力 F を t の関数として求めなさい。

[I]-A の問 2 で求めた T に対して，時刻 $t=\dfrac{3T}{4}$ において，エレベータの加速度は 0 となり，その後エレベータはそのまま等速直線運動を続けた。

問 4 時刻 $t=\dfrac{3T}{4}$ 以降，エレベータとともに移動する観測者が小球の運動を観測した場合，小球はどのような運動をするか，答えなさい。

問 5 $\alpha_0=g$ のとき，時刻 $t=0$ から $3T$ までの間の $z(t)$ のグラフを描きなさい。

時刻 $t=0$ から t_0（ただし，$t_0\neq\dfrac{3T}{4}$）まではエレベータが鉛直上方に一定の加速度 α_0 で移動し，時刻 $t=t_0$ 以降はエレベータの加速度が 0 となり，その後エレベータがそのまま等速直線運動を続けた場合を考える。

問 6 時刻 $t=t_0$ 以降，エレベータとともに移動する観測者が小球の運動を観測した場合，小球が静止し続けるような t_0 が存在するか，答えなさい。t_0 が存在する場合，具体的な表式を求めなさい。

[I]-C

図 2 のように，エレベータの外で静止している観測者から見た鉛直上向きの座標系 Z を考えてみよう。この座標系でのエレベータの天井と小球の座標をそれぞれ Z_{E}，Z_{P} とする。「最初の状態」の後，時刻 $t=0$ からエレベータが一定の外力 F_0 により鉛直上向きに運動する場合を考える。ただし，時刻 $t=0$ において $Z_{\mathrm{P}}=0$ とする。また，エレベータのみの質量は以下においても M とする。

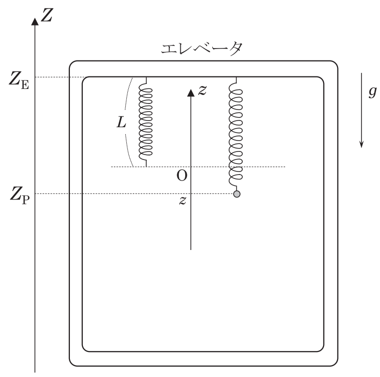

図 2

問 1 時刻 $t=0$ における Z_{E} を求めなさい。

問 2 この座標系での，ある時刻 t におけるエレベータと小球の運動方程式をそれぞれ表しなさい。

座標 Z_{G} を $\dfrac{MZ_{\mathrm{E}}+mZ_{\mathrm{P}}}{M+m}$ とする。また，ばねの伸びは $Z_{\mathrm{R}}=Z_{\mathrm{E}}-Z_{\mathrm{P}}-L$ と表すことができる。

問 3 速度 $\dfrac{dZ_{\mathrm{G}}}{dt}$ が $t>0$ で常に正となる条件を求めなさい。

問 4 問 2 の運動方程式を Z_{G} と Z_{R} に関する方程式に変形し，それぞれの方程式を解くことにより，ある時刻 t におけるエレベータの座標 Z_{E} を求めなさい。

[I]-D

再び，エレベータとともに移動する観測者が小球の運動を観測する場合を考えよう。「最初の状態」の後，時刻 $t=0$ 以降エレベータは鉛直方向に加速度 $\alpha(t)=\alpha_1\sin\omega_0 t$ で動くものとする。また，ω_0 は A-問 2 で求めた ω とは異なるものとする。

一般に，変数 x が定数 ω，ω_0，x_0，D に対して，方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2(x-x_0)+D\sin\omega_0 t \tag{3}$$

を満たす場合，この方程式の解は，定数 A，B，C を用いて，

$$x(t)=x_0+A\cos\omega t+B\sin\omega t+C\sin\omega_0 t \tag{4}$$

と表すことができることが知られている。ただし，定数 C は式 (4) において $A=B=0$ とした式を方程式 (3) に代入し，係数を比較することで決定する。

問 1 時刻 $t=0$ 以降のある時刻 t に，エレベータとともに移動する観測者が小球の運動を観測した場合の，小球に対して成り立つ運動方程式を表し，小球の時刻 t での位置 $z(t)$ を求めなさい。

問 2 前問の結果に対して，$\omega_0\ll\omega$，$\omega_0\gg\omega$，$\omega_0\fallingdotseq\omega$ の場合の小球の運動をそれぞれ考察しなさい。必要があれば，次の近似式を用いなさい。

$|\theta|\ll 1$ のとき，
$\sin\theta\fallingdotseq\theta$
$\cos\theta\fallingdotseq 1-\dfrac{\theta^2}{2}$

ここで,「最初の状態」の後，エレベータを静止させたままとした。空気抵抗とは異なるエレベータ内での小球の速度に比例する抵抗力（比例定数を $-2m\gamma$ とする）を小球に与える，質量の無視できる機構を取り付けた。その後，つり合いの位置 z_0 からわずかに離れた位置 z_1 に小球を移動させ，時刻 $t=0$ において静かに放した。

一般に，変数 x が定数 ω，x_0，γ に対して，方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2(x-x_0) - 2\gamma\frac{dx}{dt} \tag{5}$$

を満たす場合，この方程式の解は，定数 A，B と自然対数の底 e を用いて，

$$x(t) = x_0 + e^{-\gamma t}(A\cos\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\,t + B\sin\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\,t) \qquad (\gamma < \omega) \tag{6}$$

$$x(t) = x_0 + e^{-\gamma t}(At + B) \qquad (\gamma = \omega) \tag{7}$$

$$x(t) = x_0 + e^{-\gamma t}(Ae^{\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\,t} + Be^{-\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\,t}) \qquad (\gamma > \omega) \tag{8}$$

と表すことができることが知られている。

問 3 小球はどのような運動をするか，答えなさい。

問 4 最後に，ある時刻 $t = t_1$（ただし，$t_1 > 0$）以降，エレベータを鉛直上方に加速度 $\alpha(t) = \alpha_1 \sin\omega_0 t$ で移動させた。エレベータとともに移動する観測者が時刻 $t = t_1$ 以降に観測した小球の運動と類似の物理量の時間変化を，その他の物理現象においても見出すことができる。どのような物理現象が考えられるか，答えなさい。該当の物理現象を説明するための物理量を適宜定義したり，図（どのような構成で題意を満たすのかを示すもの）を描いたりして説明しなさい。

[II]

反射や屈折による光線の曲がりは，さまざまな方法により求めることができる。このことを確かめたのち，重力による光線の曲がり (重力レンズ効果) について考えてみよう。

問 1 大型の光学望遠鏡では，集光のために表面が放物面[1]となる反射鏡が用いられている。図 1 を参考にして，光軸が $x = y = 0$ で，反射面が

$$z \quad = \quad a\left(x^2 + y^2\right) \tag{1}$$

で表される鏡（ただし $a > 0$）に，$z = +\infty$ から，$(x, y) = (b, 0)$ の直線に沿って入射する光を考えよう。入射光も反射光も $y = 0$ の面内にあり，それらのなす角の 2 等分線は鏡面に垂直となる。入射光は $x = b$，2 等分線 (法線) と反射光は媒介変数 t を用いて

$$2\text{ 等分線 (法線)}: \qquad (x, z) \quad = \quad (ct + b, t + ab^2) \tag{2}$$

$$\text{反射光}: \qquad (x, z) \quad = \quad (c't + b, t + ab^2) \tag{3}$$

と表すことができる。変数 c, c' を a, b を用いて表しなさい。

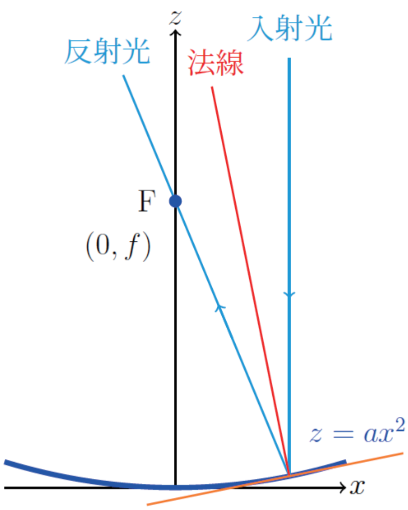

図 1

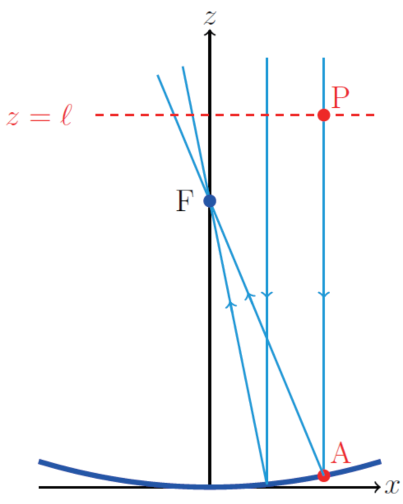

図 2

問 2 反射光と $x = 0$ 平面の交点 F の z 座標 f を求め，その値は b によらないことを確認しなさい。この点が放物面の焦点である。

問 3 問 2 で求めた焦点 F は，光は位相が等しいときに強め合うという波動性を利用しても求められる。図 2 のように $z = \ell > 0$ で位相が揃っている平面波の入射を考える。

[1]放物線をその軸を中心として回転させてできた曲面。

波面上の任意の点 $\mathrm{P} = (x, \ell)$ を出て，放物面上の点 $\mathrm{A}= (x, ax^2)$ で反射し，焦点 F に到達する光の光路長 (=線分 PA と線分 AF の長さの和) を求めなさい。また焦点で光の位相が揃うことを示しなさい。

問 4 凸レンズの焦点の外側にある物体の実像がレンズの反対側にできるのも，像と実像の間の光路長が光の経路によらなくなるためである。この原理を使って，屈折率が $n(> 1)$ の材料で作られた半径が R の凸レンズの形状を求めよう。この問題では表面が

$$z = \pm z_s(r) \qquad (r < R)$$

となるようにレンズを置く。ただし $R = r$ での厚みは 0 とする。ここで $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ はレンズの光軸からの距離，$z_s(r)$ はレンズの厚みの半分を表す。

図 3 を参考にして，z 軸上の二つの点 $(z, x) = (2f, 0)$ と $(z, x) = (-2f, 0)$ を結ぶ光線の光路長を，光線が $z = 0$ の面を通過する位置 x の関数として求めなさい。また凸レンズでは光路長が x によらないことを利用し，その表面 $z = z_s(x)$ は 2 次曲線の一部となることを示しなさい。

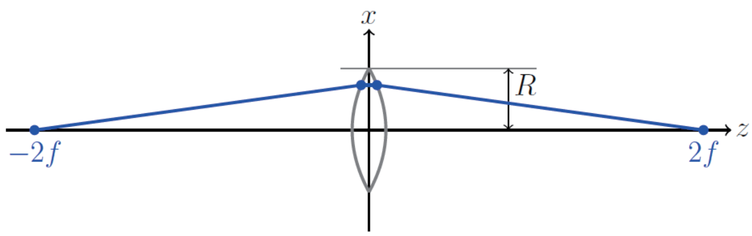

図 3

(次ページに続く)

問 5 図 4 のように，平面 $z = 0$ を境として，屈折率が $z < 0$ では 1，$z > 0$ では $n(> 1)$ である場合を考える。このとき $y = 0$ の平面内で $z > 0$ の点 P から $z < 0$ の点 Q へ光が到達する時間 t が最小となる経路を求めたい。そのような経路は座標が $(z, x) = (0, m)$ である点 M を通る折線に限られる。点 P の座標を $(z, x) = (z', 0)$，点 Q の座標は $(z, x) = (z'', q)$ として，m, n, q, z', z'' が満たす関係式を求めなさい。この問いは問 6 の準備なので，m を他の変数の関数にまとめる必要はない。これ以降，光の到達時間を計算する際には，屈折率 1 での光速度を v_{ph} と表しなさい。

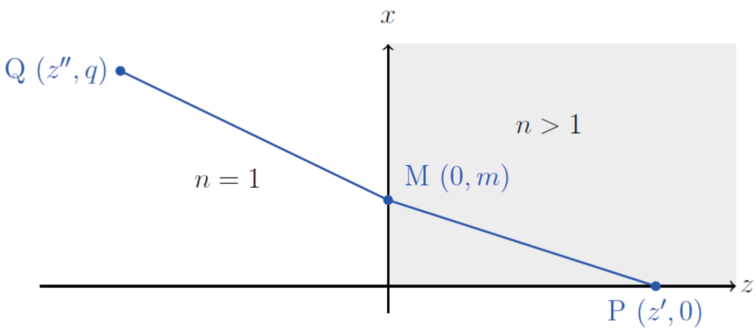

図 4

問 6 問 5 で求めた折線は屈折の法則に従うことを示しなさい。

問 5, 6 で確かめたように光は到達する時間が極小あるいは極大となる経路を通る。証明していないが，到達時間が極小あるい極大となる経路は屈折の法則を満たす。このことを使って，レンズとして球体を使用した場合の像を考えよう。

問 7 図 5 に示すように点光源を屈折率が n で半径が a の球体を通して見た場合を考える。球体の中心を原点とする座標を考え，点 $\mathrm{P}(x, y, z) = (0, 0, D)$ に置かれた点光源を点 $\mathrm{Q}(x, y, z) = (0, 0, -D)$ から観測する。球体の表面の点 A $[= (a \sin\theta, 0, a\cos\theta)]$，点 B $[= (a\sin\theta, 0, -a\cos\theta)]$ を考え，光が線分 PA, AB, BQ を通る場合の時間 t_{PABQ} を求めなさい。簡単のため，線分 PA は球体の外側だけにある場合だけを考える。この条件を満たすのは $|\theta| \leqq \theta_{\max}$ である。$\cos\theta_{\max}$ の値を D, a を用いて表しなさい。

問 8 球体の半径 a に対して距離 D が十分に遠い場合 $(D \gg a)$ について，問 7 で求めた光の到達時間 t_{PABQ} が極大や極小をもつ条件を求めなさい。次に t_{PABQ} を θ の関数としてその概形を表しなさい。ただし θ の範囲は $-\theta_{\max} \leqq \theta \leqq \theta_{\max}$ としなさい。また縦軸は $t_{\mathrm{PABQ}}(\theta) - t_{\mathrm{PABQ}}(\theta = 0)$ として変化の様子が分かるようにすること。この関数の極大や極小の数は屈折率 $n > 1$ の値により異なるので，場合分けすること。
必要に応じて，$|\alpha| \ll 1$ のとき $(1 + \alpha)^{\beta} \fallingdotseq 1 + \alpha\beta$ などの近似式を用いて良い。

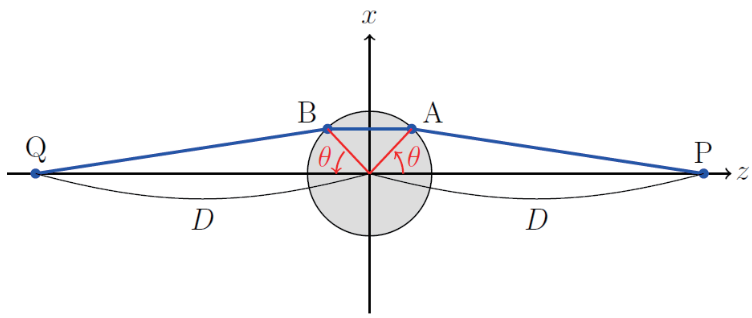

図 5

問 9 時刻 t_{PABQ} が θ の値により複数の極大や極小を持つ場合について，点 P にある光源が点 Q にいる観測者からどのように見えるか論じなさい。

問 10 図 6 に示すように，光源が点 $\mathrm{P}(x, y, z) = (b, 0, D)$ にあり，これを点 $\mathrm{Q}(x, y, z) = (b, 0, -D)$ から観測すると光源がどのように見えるか論じなさい。屈折率 n は問 9 で考えた条件を満たしており，球体の中心と PQ を結ぶ直線の距離 b はごくわずか $(0 < b \ll a)$ であるとして良い。論理は数学的に厳密でなくても良い。

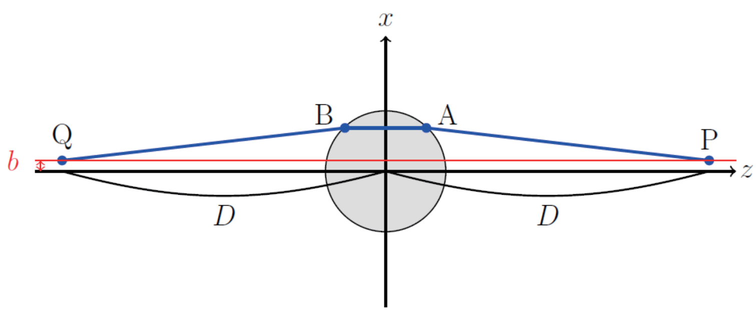

図 6

(次ページへ続く)

凸レンズや球体では，光が入射した際にその中心に向かう力が働いているように見える。一般相対論によれば，重力により真空の屈折率が変わる。質量 M の星から r だけ離れたところでの屈折率は $n = \left(1 - \dfrac{2GM}{r{v_{\mathrm{ph}}}^2}\right)^{-1}$ と考えると，一般相対論の予言する光の屈折が得られる。ここで G は万有引力定数を表す。このことを利用して次の問題に取り組みなさい。

問 11 図 7 はハッブル宇宙望遠鏡で撮影した遠方の銀河団である。画面中央の明るく光った天体 (楕円銀河) の周囲に見える青い円弧状の天体は複数の銀河である。銀河が円弧状に見える理由と，この銀河が実際はどこに存在するかを論じなさい。

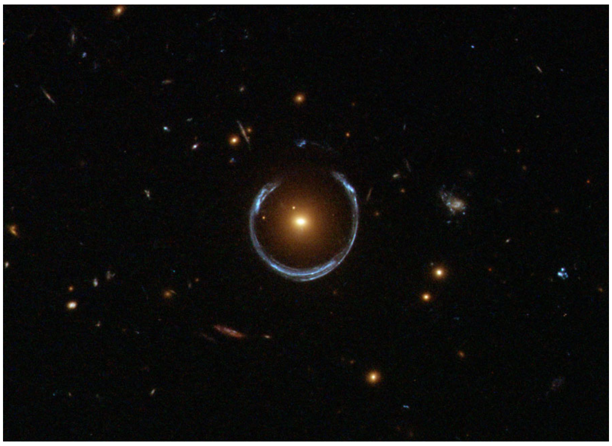

図 7　ハッブル宇宙望遠鏡により撮像された遠くの銀河。広がった赤い天体や青い天体は全て銀河である。(写真は NASA)