令和５年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述　数学

解答例

解答例：数学

問 1　関数を含む基本的な方程式が解けることを確認する問題

(1) $x^4-5x^2+4=(x^2-1)(x^2-4)=(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)=0$ より，

$\boxed{x=\pm1,\pm2}$ が得られる。

(2) $x^2-4x \geqq 0$ のとき，すなわち $x \leqq 0, 4 \leqq x$ のとき，$x^2-4x-4=0$。

これより，$x=2\pm2\sqrt{2}$。これは条件を満たす。

$x^2-4x<0$ のとき，すなわち $0<x<4$ のとき，$x^2-4x+4=0$。

これより，$x=2$。こちらも条件を満たす。

よって，解は $\boxed{x=2,2\pm2\sqrt{2}}$ となる。

(3) $\cos 2x+\sin x=1-2\sin^2 x+\sin x=(1+2\sin x)(1-\sin x)$ と変形できる。

$\sin x=1, \sin x=-\dfrac{1}{2}$ より，$0 \leqq x < 2\pi$ の範囲（定義域）では,

$\boxed{x=\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}}$ が解となる。

(4) $\log_2 x+\log_4 \dfrac{1}{x}=\log_2 x-\dfrac{1}{2}\log_2 x=\dfrac{1}{2}\log_2 x$ より，$\dfrac{1}{2}\log_2 x=2$ を解けばよい。

$\log_2 x=4$ より $x=2^4=16$。よって，$\boxed{x=16}$ が解となる。この解は真数条件 $x>0$ を満たす。

問 2 微分の計算を問う問題

(1) $f'(x)=-e^{-x}$ より，求める接線の傾きは $-e^{-a}$ である。

よって，接線の方程式は $y=-e^{-a}(x-a)+e^{-a}=-e^{-a}x+(a+1)e^{-a}$。

$\boxed{y=-e^{-a}x+(a+1)e^{-a}}$ が求める方程式である。

(2) 接線の y 切片は $(a+1)e^{-a}$ であり，x 切片は $a+1$ となる。

よって $\boxed{S(a)=\dfrac{1}{2}(a+1)^2e^{-a}}$ となる。

$a=-1$ のときは点 P，Q が原点と一致するため問題文より $S(a)=0$ となり，上の式に含まれる。

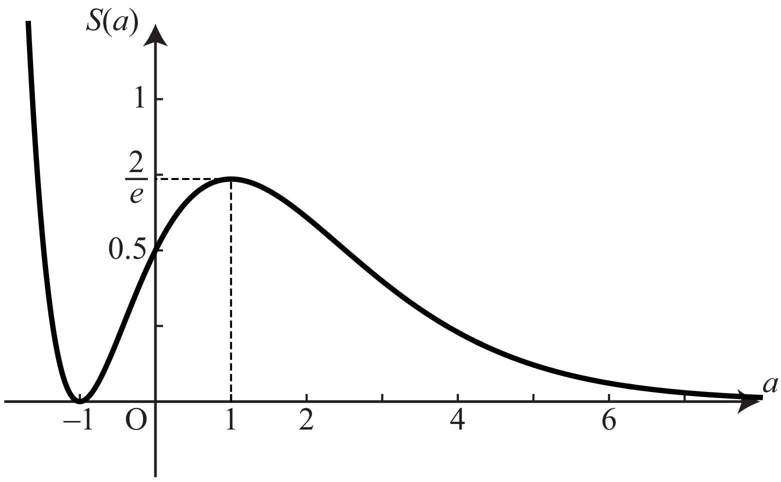
(3) $S'(a)=-\dfrac{1}{2}(a+1)(a-1)e^{-a}$ となるので，$\boxed{S(a)\text{ 軸との切片は } S(0)=\dfrac{1}{2}}$ である。

また，$\boxed{a=-1\text{ で極小値 } S(-1)=0}$ をとり，$\boxed{a=1\text{ で極大値 } S(1)=\dfrac{2}{e}}$ をとる。

$a\to-\infty$ のとき $S(a)\to+\infty$，$a\to\infty$ のとき $S(a)\to 0$ が得られる。

（問題で与えられた極限値の公式を用いた。）

$S(a)$ の概形は以下のようになる。



問 3 定積分の計算を問う問題

(1) $\displaystyle\int_a^b (x-a)^3(x-b)\,dx=\int_0^{b-a} y^3(y+a-b)\,dy$

$\displaystyle=\frac{(b-a)^5}{5}+(a-b)\frac{(b-a)^4}{4}=\boxed{-\frac{(b-a)^5}{20}}$ と計算できる。

ただし，$y=x-a$ と置換した。

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{\cos^2 x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1-y^2}\,dy$

$\displaystyle=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1-y}\right)dy=\frac{1}{2}\left[\log|1+y|-\log|1-y|\right]_0^{\frac{1}{2}}=\boxed{\frac{1}{2}\log 3}$ と計算できる。

ただし，$y=\sin x$ と置換した。

(3) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-2x}\,dx=\left[-\frac{1}{2}xe^{-2x}\right]_0^1-\int_0^1\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)dx=-\frac{1}{2e^2}+\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^1$

$\displaystyle=-\frac{1}{2e^2}-\frac{1}{4e^2}+\frac{1}{4}=\boxed{\frac{e^2-3}{4e^2}}$ と計算できる。ただし，途中で部分積分を用いた。

問 4 数列の一般項を求める基本的問題

$a_{n+1}+1=3(a_n+1)$ と変形できる。

$b_n=a_n+1$ とおくと初項 1，公比 3 の等比数列であり，$b_n=3^{n-1}$ と得られる。

よって，数列の一般項は $\boxed{a_n=3^{n-1}-1}$ と表される。

問 5 空間図形についてベクトルを用いて解く問題

(1) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=a$ である。また $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=\sqrt{a^2+1}$ である。

ベクトルの内積の定義より $(a^2+1)\cos\theta=a$ となり $\boxed{\cos\theta=\dfrac{a}{a^2+1}}$ が得られる。

$0<a<1$ から $0<\dfrac{a}{a^2+1}<\dfrac{1}{2}<1$ であるので，この解は題意を満たす。

(2) 直線 AB 上の任意の点 P は，実数 t を用いて

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$ と表すことができる。

成分で書くと $\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}1\\a\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}a-1\\-a\\1\end{pmatrix}$。

yz 平面上の点は x 座標が 0 なので，$t=-\dfrac{1}{a-1}$。

よって，求める点の座標は $\boxed{\left(0,\dfrac{a^2}{a-1},-\dfrac{1}{a-1}\right)}$ となる。

(3) 点 Q は平面 ABC 内にあるので，実数 u,w を用いて

$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+u\overrightarrow{AB}+w\overrightarrow{AC}$ と表すことができる。

一方で $\overrightarrow{OQ}$ は $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ と直交するので $\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ となる。

$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}a-1\\-a\\1\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-1\\-(a-1)\\a\end{pmatrix}$ より

$\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{AB}=-a^2+a-1+u\left(2a^2-2a+2\right)+w(a^2-a+1)$

$=(a^2-a+1)(2u+w-1)=0$

$\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{AC}=-a^2+a-1+u\left(a^2-a+1\right)+w(2a^2-2a+2)$

$=(a^2-a+1)(2w+u-1)=0$

a^2-a+1 は常に正なので，これらの式より $u=w=\dfrac{1}{3}$ が得られる。

$$\overrightarrow{OQ}=\begin{pmatrix}1\\a\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}a-1\\-a\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\-(a-1)\\a\end{pmatrix}=\frac{a+1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}。$$

よって，求める点の座標は $\boxed{\left(\dfrac{a+1}{3},\dfrac{a+1}{3},\dfrac{a+1}{3}\right)}$ となる。

問 6 複素数の基本的性質を問う問題

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とおくと $r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$ となる。

よって，$r^4 = 4$，$4\theta = \pi + 2\pi n$（但し r は正の実数，n は整数）。

これより，$r = \sqrt{2}$，$\theta = \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}$ が得られる。

よって，$\boxed{z = 1+i,\ z = -1+i,\ z = -1-i,\ z = 1-i}$ が得られる。

問 7 場合の数，確率について理解しているかを問う問題

(1) $X = n$ となるためには n 個のサイコロの目がすべて 1 でないといけない。

よって確率は $\boxed{P = \dfrac{1}{6^n}}$ となる。

(2) $X = n+1$ となるためには n 個のうち $n-1$ 個のサイコロの目が 1 で

1 個のサイコロの目が 2 でないといけない。

2 の目の出るサイコロの選び方は n 通り。よって求める確率は $\boxed{P = \dfrac{n}{6^n}}$ となる。

(3) $X = n+2$ となるためには次の 2 つの場合が考えられる。

(i) n 個のうち $n-1$ 個のサイコロの目が 1 で 1 個のサイコロの目が 3。

これは上と同様 n 通り。

(ii) n 個のうち $n-2$ 個のサイコロの目が 1 で 2 個のサイコロの目が 2。

これは ${}_nC_2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ 通り。

(i) と (ii) は排反なので，$X = n+2$ となる確率は $P = \left\{ n + \dfrac{n(n-1)}{2} \right\} \dfrac{1}{6^n} = \boxed{\dfrac{n(n+1)}{2 \cdot 6^n}}$

となる。