令和 2 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述　物理

課題 I, II

（9:00－15:00）

注意事項

1. この冊子は，監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 問題冊子に印刷または製本の不具合がある場合は，手を上げて申し出て下さい。
3. 課題 I および課題 II の問題すべてに解答してください。
4. 解答用紙は課題ごとに分けて使用してください。解答用紙は何枚使用しても構いません。全ての解答用紙に受験番号を必ず記入して下さい。
5. 携帯電話やスマートフォン等の電子機器はすべて電源を切り，カバンにしまってください。
6. その他，監督者の指示に従って下さい。

[I]

下図のように，一様重力下で頂点を真下にして置かれた直円錐の内側の面上を，質量 m の小球が摩擦なしに運動している。円錐面は上方に十分高く，小球が円錐面から外に飛び出すことはない。円錐の頂点を原点 O とし，円錐の中心軸を z 軸とする直交座標 (x, y, z) を定義し，小球の位置を $\mathrm{Q}(x, y, z)$ とする。また，これの xy 面への射影を $\mathrm{P}(x, y)$ とする。円錐の頂角の半分を α（時間によらない定数であり，$0 < \alpha < \pi/2$）とすると，小球の位置 (x, y, z) は，原点 O から点 Q までの距離 r と 線分 OP が x 軸と成す角 θ を用いて，

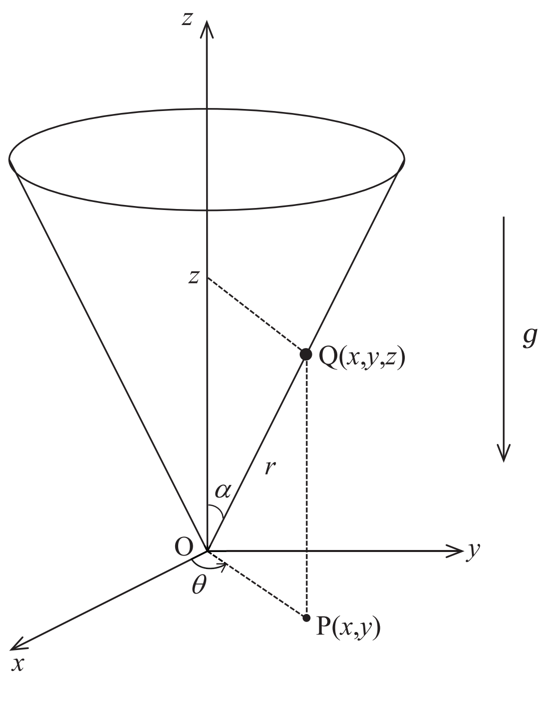
$$x = r\sin\alpha\cos\theta \tag{1}$$

$$y = r\sin\alpha\sin\theta \tag{2}$$

$$z = r\cos\alpha \tag{3}$$

と書かれる。したがって，任意の時刻 t における小球の位置，すなわち小球の運動は，2 つの変数 r と θ の t 依存性 $r(t)$ と $\theta(t)$ が分かれば，完全に記述できる。重力加速度の大きさを g として，以下の問いに答えなさい。

なお，この問題文の最後に付けた数学の公式を，必要ならば証明なしに用いて良い。



問 1 小球の速度 $\vec{v}$ は，小球の位置 (x, y, z) の時間微分として

$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) \tag{4}$$

と定義される。この式の右辺のそれぞれの成分を，r，θ，$\dfrac{dr}{dt}$，$\dfrac{d\theta}{dt}$，および α を用いて表しなさい。なお，例えば x の時間に関する一階微分を $\dot{x}$，二階微分を $\ddot{x}$ などという記号を用いて解答しても良い。

問 2 小球の運動エネルギーは

$$K = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 = \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] \tag{5}$$

と書かれる。これを，r，θ，$\frac{dr}{dt}$，$\frac{d\theta}{dt}$，および α を用いて表しなさい。

問 3 重力による小球の位置エネルギー U を r と α を用いて表しなさい。ただし，位置エネルギーの原点を円錐の頂点の位置にとる。

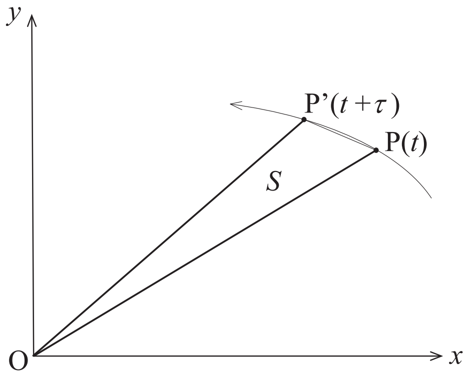
さて，点 P の xy 面での運動は，常に定点 O に向かう力による運動であり，この場合にも，ケプラーが惑星の運動に対して見出した**面積速度一定の法則**が成り立つ。下図のように，xy 面上の点 P の運動を考えるとき，時刻 t での点 P の位置を (x, y) とすれば，微小時間 $\tau\ (>0)$ 経った後の点 P（P' とする）の位置は，時刻 t での点 P の速度が $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$ なので，

$$\left(x + \frac{dx}{dt}\tau,\, y + \frac{dy}{dt}\tau\right) \tag{6}$$

と与えられる。三角形 OPP' の面積 $S\ (>0)$ は微小時間 τ に比例して増加する $(S \propto \tau)$ が，その比例係数は面積速度と呼ばれ，$\frac{dS}{dt}$ と書かれる。すなわち，τ が十分小さいとき，

$$S \fallingdotseq \frac{dS}{dt}\tau \tag{7}$$

である。まずは，本問に即して，この面積速度が時刻 t によらず一定であることを証明しよう。



問 4 点 P の xy 面上の運動について，その面積速度が

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}(r\sin\alpha)^2\frac{d\theta}{dt} \tag{8}$$

と与えられることを示しなさい。$\omega = \frac{d\theta}{dt}$ は回転角速度と呼ばれる。

問 5　点 Q の小球について，その運動方程式の x 成分，y 成分を，$\dfrac{d^2x}{dt^2}$，$\dfrac{d^2y}{dt^2}$，θ，α，および小球に働く原点 O に向かう力 F を用いて表しなさい。またその結果と，式 (1)，式 (2) を用いて，

$$\frac{d^2S}{dt^2} = 0 \tag{9}$$

であることを示しなさい。すなわち，面積速度は時刻 t によらず一定である。

以下では，問 4 で求めた面積速度を $\ell/(2m)$ とおく。すなわち，時刻 t によらず

$$mr^2\frac{d\theta}{dt}\sin^2\alpha \;=\; \ell \;(\text{一定}) \tag{10}$$

が成り立つ。これを用いて次の問いに答えなさい。

問 6　小球の全エネルギー $E = K + U$ は，式 (10) を用いて $\dfrac{d\theta}{dt}$ を消去して表すと，

$$E \;=\; \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + V(r) \tag{11}$$

と書くことができる。ここで，r の関数 $V(r)$ は，問 3 で求めた r の関数 $U(r)$ を用いて，

$$V(r) \;=\; \frac{A}{2r^2} + U(r) \tag{12}$$

と与えられる。定数 A を求めなさい。さらに，$V(r)$ の概形を r を横軸にとって図に描きなさい。

前問の結果の式 (11) はエネルギー保存則を表しており，この小球の運動が，回転の効果を含んだ有効的な位置エネルギー $V(r)$ を持つ，r 方向の 1 次元運動として記述できることを示している。位置エネルギーが $r = r_0$ で最小値をとるとして，以下の問いに答えなさい。

問 7　全エネルギーが $E = V(r_0)$ であれば，つねに $dr/dt = 0$ なので小球は円運動する。このことを利用して，小球が $r = r_0$ で円運動しているときの式 (10) の ℓ と，回転角速度 ω_0 を，r_0 を用いて表しなさい。

問 8　式 (12) の $V(r)$ は，$r \to 0$ でも $r \to \infty$ でも $+\infty$ に発散するので，小球は必ず r の有限な領域（$0 < r < \infty$）に閉じ込められている。全エネルギーが $V(r)$ の最小値より大きく $[E > V(r_0)]$，小球が最小値 $r_{\min}$ から最大値 $r_{\max}$ の範囲を運動している場合について，以下の問いに答えなさい。

(1) 小球の全エネルギーを E として，問 6 で描いた $V(r)$ の図に，小球の可動領域 $(r_{\min}, r_{\max})$，および位置 r_0 を書き入れなさい。

(2) 次の関係式を証明しなさい。

$$\frac{2\,r_{\min}^2\,r_{\max}^2}{r_{\min}+r_{\max}} \;=\; r_0^3 \tag{13}$$

ここで r_0 は問 7 で求めたものである。

(3) 次式を証明しなさい。ただし $B = mg\cos\alpha$ である。

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = -\frac{B}{r^2}\left(r - r_{\min}\right)\left(r - r_{\max}\right)\left(r + \frac{r_{\min}r_{\max}}{r_{\min} + r_{\max}}\right) \tag{14}$$

これより $\left(r - r_{\min}\right)\left(r - r_{\max}\right) \leqq 0$ でなければならない。したがって，r は $r_{\min}$ と $r_{\max}$ の間を往復し，点 P は xy 面上で半径 $r_{\min}\sin\alpha$ と $r_{\max}\sin\alpha$ のふたつの同心円の間を周期運動することになる。

次に，問 7 の円運動をしている小球に対し，式 (10) の ℓ の値を変えないようにして，小さなエネルギー Δ を加える。そうすると小球は，$r = r_0$ の周りで r をわずかに変えるような小さな振動を始めた。この振動による r の変化を δ として，$r(t) = r_0 + \delta(t)$ とする ($|\delta(t)| \ll r_0$)。以下の問いに答えなさい。

問 9 $|\delta|$ が r に比べて十分小さいので，位置エネルギー $V(r)$ の式は

$$V(r) \ = \ V(r_0) + \frac{1}{2}\,k\,\delta^2 \tag{15}$$

と近似できる。ここで k は $\dfrac{d^2V(r)}{dr^2}$ の $r = r_0$ での値である。k の具体的な式を求めなさい。上式の右辺第 2 項は，ばね定数 k，変位 δ のばねの位置エネルギーとみなすことができる。この微小振動の角振動数 ω_r を求めなさい。

問 10 比 ω_r/ω_0 を α を用いて表しなさい。振動の角振動数 ω_r が，問 7 で求めた円運動の角振動数 ω_0 と一致するとき，α の値を求めなさい。以下ではこれを α_0 と書く。

問 11 問 9 より，r の時間依存性 $r(t)$ は，$\delta(t) = \rho\cos\omega_r t$ $(0 < \rho \ll r_0)$ として，

$$r(t) \ \fallingdotseq \ r_0 + \rho\cos\omega_r t \tag{16}$$

と書くことができる。ρ は微小振動の振幅である。またこのとき，θ の時間依存性 $\theta(t)$ は，式 (10) により，

$$\theta(t) \ \fallingdotseq \ \omega_0 t - 2\left(\frac{\omega_0}{\omega_r}\right)\left(\frac{\rho}{r_0}\right)\sin\omega_r t \tag{17}$$

と書くことができる。$\alpha = \alpha_0$ を仮定して，$\omega_0 = \omega_r$, $\rho = r_0/10$ の場合を考える。

(1) r と θ の関係を，θ を横軸に，r を縦軸にして，図に描きなさい。

(2) 点 $\mathrm{P}(x, y)$ の軌跡の概形を xy 面上に描き，運動の様子を簡単に説明しなさい。

問 12 ふたつの周期 $T_0 = 2\pi/\omega_0$ と $T_r = 2\pi/\omega_r$ を定義する。一般にこれらの比が有理数となるとき，すなわち

$$\frac{T_0}{T_r} \ = \ \frac{p}{q} \quad (p,\, q \text{ は正の整数}) \tag{18}$$

となるとき，xy 面上の小球の軌跡は閉じた軌跡となる。言い換えれば，一定時間ごとに小球は同じ運動を繰り返す。$p = 3$, $q = 2$ のとき，点 $\mathrm{P}(x, y)$ の軌跡の概形を xy 面上に描きなさい（軌跡のつながり方が分かるように線に番号をつけること）。またそのときの α の値を求めなさい。さらに，r と θ の関係を，θ を横軸に，r を縦軸にして，図に描きなさい。

数学公式

(i) u, v が時刻 t の関数 $u(t)$, $v(t)$ のとき，関数 $f(t) = u(t) + v(t)$ の t 微分は

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{du(t)}{dt} + \frac{dv(t)}{dt} \tag{19}$$

である。この式は，関数の変数 (t) を省略して，しばしば

$$\frac{df}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{dv}{dt} \tag{20}$$

と書かれる。以下では，このように変数 (t) を省略した公式のみを示す。また，問題文の本文でも，この省略した表記を用いている。

(ii) u, v が時刻 t の関数のとき，関数 $f = uv$ の t 微分は

$$\frac{df}{dt} = \frac{du}{dt}v + u\frac{dv}{dt} \tag{21}$$

である。

(iii) φ が時刻 t の関数のとき，関数 $f = \sin\varphi$ の t 微分は

$$\frac{df}{dt} = \cos\varphi\,\frac{d\varphi}{dt} \tag{22}$$

であり，関数 $f = \cos\varphi$ の t 微分は

$$\frac{df}{dt} = -\sin\varphi\,\frac{d\varphi}{dt} \tag{23}$$

である。

(iv) 座標平面上の 3 点 $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(a,b)$, $\mathrm{B}(c,d)$ に対して，三角形 OAB の面積は

$$S = \frac{1}{2}\left|ad - bc\right| \tag{24}$$

と与えられる。

(v) $r > 0$ として，$|\delta| \ll r$ のとき，近似式

$$\frac{1}{(r+\delta)^2} \fallingdotseq \frac{1}{r^2} - \frac{2}{r^3}\delta + \frac{3}{r^4}\delta^2 \tag{25}$$

が成り立つ。

(このページは空白です)

[II]

導線やケーブルの形状や大きさはよく考えられて設計されている。以下の問いに答え，その特徴を分析しよう。

問 1 半径 a，長さが ℓ の円柱状の導線の両端に一定の電圧 V をかけると，円柱の断面では単位面積あたりの電流 (電流密度) が一定になる。このことを示すために，導線を円柱の軸に平行な平面で 2 分割し，2 本の並列抵抗にするという思考実験をしてみよう。分割された円柱の断面を S_1, S_2 (ただし $S_1 + S_2 = \pi a^2$) として，それぞれの抵抗値を求め，流れる電流は断面積に比例することを示しなさい。ただし導線の素材の抵抗率 ρ は一定とする。

問 2 次に導線の断面積が軸に沿って一定になっている理由を考えよう。図 1 に示すように導線の断面積 S が次式のように軸に沿って S_1 から S_2 に一定の割合で緩やかに変化する場合を考える。

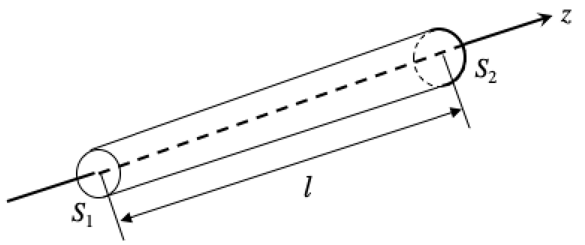


図 1　断面積が S_1 から S_2 に変化する，長さ ℓ の抵抗

$$S = S_1 + \frac{(S_2 - S_1)}{\ell} z \tag{1}$$

ここで z は導線の軸に沿った座標で， $0 \leqq z \leqq \ell$ である。抵抗の値は太さの異なる導線が直列につながった場合と同様の考え方で求められる。求めた抵抗の値を平均の断面積

$$\overline{S} = \frac{S_1 + S_2}{2} \tag{2}$$

と，変化の度合いを表す変数

$$\alpha = \frac{S_2 - S_1}{S_1 + S_2} \tag{3}$$

を用いて表しなさい。

問 3 平均の断面積と $\overline{S}$ と長さ ℓ を固定したとき，問 2 で求めた抵抗が最小となるのは断面積が一定 $(\alpha = 0)$ のときであることを示しなさい。

問 4 多量の電気を流すためには，太い導線を使う必要がある。直径が 1.0 mm で長さが 5.0 m の 2 本の銅線を使い，100V の直流電源と 500W の電力を消費する機器を結ぶ電源ケーブルを作成した。この電源ケーブルに発生するジュール熱を求めなさい。ただし銅の抵抗率は $1.55 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \mathrm{m}$ とする。電源ケーブルとするには，互いに同じ大きさで符号の異なる電流を通す導線 2 本が必要であることに気をつけなさい。

細い直線状の導線に電流 I が流れると，導線からの距離が r の場所には $H = \dfrac{I}{2\pi r}$ の強さの磁場ができる (アンペールの法則)。導線やケーブルの形状は，電流を流したときに周囲に磁場が少なくなるように設計されていることを確認しよう。

問 5 交流回路に使われる導線のモデルとして，直交座標で $(x,\ y) = (a,\ 0)$ を通り $+z$ 方向に電流 I が流れ，$(x,\ y) = (-a,\ 0)$ を通り $-z$ 方向に電流 I が流れる場合を考える。どちらの電流も z 方向に十分長い距離を一様に流れている。この時の磁場の y 成分 H_y を求め，$y = 0$ の xz 面での値を x の関数として，$x = 0$ の yz 面での値を y の関数としてグラフに表しなさい。

問 6 前問で 2 本の電流の間の距離 $d = 2a$ だけを短くした場合，$(x,\ y) = (0,\ 0)$, $(r\ ,0)$, $(0,\ r)$ の点での磁場の強さがどのように変化するか，$r > d$ として論じなさい。

問 7 図 2 のように半径 r の円の中心から $a (< r)$ だけずれた場所を，紙面に垂直な導線上を裏から表に電流 I が流れている。このとき，電流が流れているところから反時計回りに角度 θ だけずれた円周上の点，$(x,\ y) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta)$, での磁場の強さ H と，円に沿った方向の成分 H_θ を求めなさい。

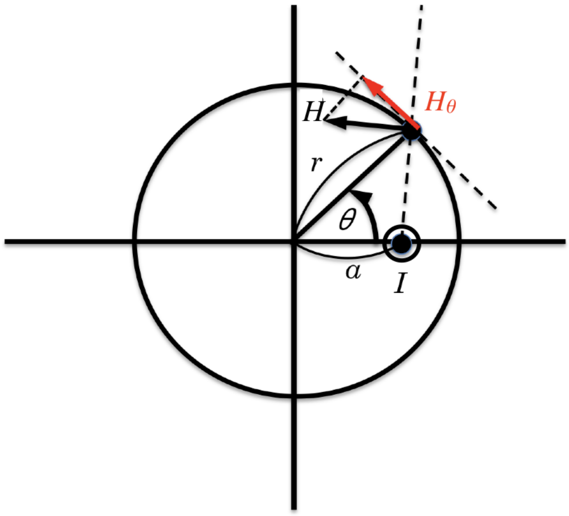


図 2. 半径 r の円の中心から a だけ離れたところを流れる電流による磁場。

ヒント: 極座標で $(r,\ \theta)$ の点で，円の中心とこの点を結ぶ線分に垂直で，θ が増える向きの長さ 1 のベクトルは $\boldsymbol{e}_\theta = (-\sin\theta,\ \cos\theta)$ と表せる。

問 8 前問で求めた H_θ を円周上で平均した値は

$$\langle H_\theta(r) \rangle \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_\theta(r,\theta)d\theta \;=\; \begin{cases} \dfrac{I}{2\pi r} & (r > a) \\ 0 & (r < a) \end{cases} \tag{4}$$

となることを示しなさい。

ヒント: 三角関数の積分は $x = \tan\dfrac{\theta}{2}$ により置換すると簡単な形に変形できることがある。また不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}dx$ は，$x = \tan t$ とすると積分しやすい形に置き換えられる。

式 (4) は

$$2\pi r \langle H_\theta(r) \rangle \;=\; \begin{cases} I & (r > a) \\ 0 & (r < a) \end{cases} \tag{5}$$

と書き換えることができる。式 (5) は円周上の磁場の強さの平均と円周の積がその中を流れる電流と等しいことを示していて，導線が有限の太さを持っている場合や複数ある場合にも成り立つことが知られている。

問 9 図 3 に示すような同軸ケーブルでは，半径 $r \leqq a$ と $r = b$ のところだけが導体で，両者には常に反対向きで同じ大きさの電流が流れている。同軸ケーブルの半径 $r \leqq a$ の部分に電流 I が流れているとき，その周囲にできる磁場の強さを，中心軸からの距離 r の関数として求め，グラフに表しなさい。

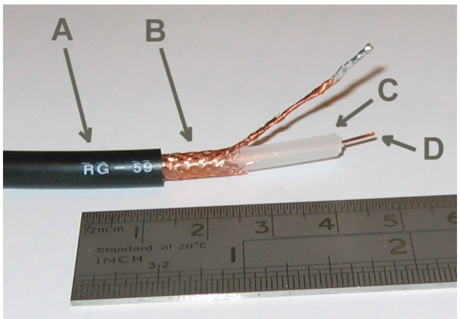


図 3. 同軸ケーブル RG-59 の構造。A: シース (保護被膜 ビニール) B: 外部導体（網組み銅線)　C : 絶縁体（ポリエチレン）D : 内部導体（軟銅線) Wikipedia より転載。

問 10 式 (5) と似た式は，円だけでなく，正方形でも成り立つ。辺の長さが $2a$ である正方形の中心に電流 I が流れている場合を考え，各辺について辺の方向の磁場成分を積分したもの (これは磁場の平均値と辺の長さの積と等しい) を求めなさい。この計算では，各辺が反時計回りにつながるよう注意して積分すること。

問 11 前問の結果を利用して，単位長さあたり n 回巻いた無限に長い円筒状のコイルの中心には，強さ nI の磁場ができることを説明しなさい。

問 12 問 4, 5 で考えた平行な 2 本の導線は交流用の導線のモデルである。交流用の導線や，同軸ケーブルは外部に磁場が発生しにくい形状になっている。これは何のためだろうか。磁場が発生する場合にどのような問題が生じるか述べなさい。

課題 II　問 9 図 3 (p. 10) の出典

ウィキメディア・コモンズ (Wikimedia Commons)

`https://commons.wikimedia.org/wiki/File:RG-59.jpg?uselang=ja`