令和３年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述　数学

解答例

解答例：数学

問 1　関数を含む基本的な方程式が解けることを確認する問題

(1) 複素数の基本的計算と 3 次方程式の解の求め方

解の 1 つが $x = \dfrac{1+i}{2}$ であるから，これを式に代入して，実部と虚部に分けて方程式を立てる。実部に対しては $\dfrac{b-7}{2} = 0$，虚部に対しては $\dfrac{a+b+1}{2} = 0$ より，$a = -8$, $b = 7$ を得る。従って，方程式は $2x^3 - 8x^2 + 7x - 3 = 0$ である。$x = 3$ は方程式を満たすから因数定理より因数分解できて，$2x^3 - 8x^2 + 7x - 3 = (x-3)(2x^2 - 2x + 1) = 0$ となる。$2x^2 - 2x + 1 = 0$ の解は，解の公式より $x = \dfrac{1 \pm i}{2}$。よって，残りの解は $x = 3$ と $x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{i}{2}$ である。

(2) 対数の基本的計算。

$\log_x 2 - \log_x(x+2) = \log_x \dfrac{2}{x+2} = 1$ である。式変形すると，$\dfrac{2}{x+2} = x$ となる。よって，$x^2 + 2x - 2 = 0$ の解を求めれば良い。解は $x = -1 \pm \sqrt{3}$ であるが，$x > 0$ の条件があるので，$x = \sqrt{3} - 1$ が答え。

(3) 三角関数の合成

$\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = 2$ なので，$\sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = 1$ を満たす x を $0 \leqq x < 2\pi$ の範囲で求めれば良い。従って，$x = \dfrac{\pi}{3}$ である。

問 2 条件付き確率の問題（ベイズの定理）

取り出した検体に病原菌がいる事象を A，この検査方法で「病原菌がいる」と判定される事象を B とする。問題より与えられる確率は $P(\mathrm{A}) = \dfrac{1}{5}$，$P(\bar{\mathrm{A}}) = \dfrac{4}{5}$，$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \dfrac{7}{10}$，$P_{\bar{\mathrm{A}}}(\mathrm{B}) = \dfrac{1}{10}$ である。

(1)「病原菌がいる」と判定された検体は，病原菌がいる検体が正しく「病原菌がいる」と判定された場合と，病原菌がいない検体が間違って「病原菌がいる」という判定された場合で，これらは同時に起こらない（排反である）ので，それぞれの確率の和を取ればよい。よって，$P(\mathrm{B}) = P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) \times P(\mathrm{A}) + P_{\bar{\mathrm{A}}}(\mathrm{B}) \times P(\bar{\mathrm{A}}) = \dfrac{7}{10} \times \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{10} \times \dfrac{4}{5} = \dfrac{11}{50}$ と求められる。

(2)「病原菌がいる」と判定されたときに本当に検体に病原菌がいる確率は $P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = \dfrac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{P(\mathrm{B})} = \dfrac{P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})P(\mathrm{A})}{P(\mathrm{B})} = \dfrac{7}{50} \div \dfrac{11}{50} = \dfrac{7}{11}$ である。

問 3 放物線とその接線，定積分の問題。

(1) 接点の座標を (s, s^2) とすると，この接点を通る接線の傾きは $2s$ である。よって，接線の方程式は $y = 2sx + b$ で表せる (ここで b は定数)。この接線が点 $(1, -3)$, (s, s^2) を通ることから，２つの方程式が得られる。

$$-3 = 2s + b$$
$$s^2 = 2s^2 + b$$

これより，$s = -1, 3$ を得る。従って，$(-1, 1)$，$(3, 9)$ が接点である。

(2) ２つの接点を通る直線は，$y = 2x + 3$ である。２つの接点の間では，$2x + 3 \geq x^2$ が成り立つから，この直線と放物線で囲まれた面積は

$$S = \int_{-1}^{3} \left(2x + 3 - x^2\right) dx$$

これより，

$$S = \left[x^2 + 3x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{3}$$

を計算すると，$S = \dfrac{32}{3}$ が得られる。

問 4 数列の和を求める基本的問題。初項が $a = 1$，公比が $r = -1/4$ の等比数列である。

(1) 一般項は

$$a_n = \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, ...)$$

(2) 等比数列の無限級数は $|r| < 1$ のとき

$$S = \frac{a}{1 - r}$$

で与えられる。ここで，$a = 1$，$r = -\dfrac{1}{4}$ であるから，$S = \dfrac{4}{5}$ である。

問 5 置換を伴う不定積分について問う問題

(1) $u=x^2-1$ と変換する。ここで，$\dfrac{du}{dx}=2x$ より，

$$\int x\log\left(x^2-1\right)\,dx=\int\frac{1}{2}\log u\ du$$
$$=\ \frac{1}{2}\left(u\log u-u\right)+C=\frac{1}{2}\left\{(x^2-1)\log\left(x^2-1\right)-(x^2-1)\right\}+C$$

（ただし，C は積分定数）

(2) $u=e^x+1$ と変換する。ここで，$\dfrac{du}{dx}=e^x$ より，

$$\int\frac{e^x}{e^x+1}dx=\int\frac{1}{u}du=\log u+C=\log(e^x+1)+C$$

問 6 空間内の平面とベクトルについての問題

(1) 平面を $ax+by+cz+d=0$ で表す。この面が 3 点 A, B, C を通ることから，以下の 3 つの方程式を立てる。

$$-a-2b-c+d=0$$
$$a+2b+3c+d=0$$
$$a+b+c+d=0$$

これらを整理すると，$a=-2d$，$b=2d$，$c=-d$ が得られるから，それを元の方程式に代入して d で割ると，$2x-2y+z-1=0$ が得られる。

(2) 法線ベクトルを $\vec{n}=(p,q,r)$ とする。法線ベクトルは面内のベクトルと直交することを利用して求める。面内のベクトルとして $\vec{\mathrm{AB}}=\vec{\mathrm{OB}}-\vec{\mathrm{OA}}=(2,4,4)$，$\vec{\mathrm{AC}}=\vec{\mathrm{OC}}-\vec{\mathrm{OA}}=(2,3,2)$ を選び，それぞれ法線ベクトルとの内積を計算する。$\vec{n}\cdot\vec{\mathrm{AB}}=2p+4q+4r=0$，$\vec{n}\cdot\vec{\mathrm{AC}}=2p+3q+2r=0$ となる。この連立方程式を解くと，$p=2r$，$q=-2r$ が得られる。求めるのは単位法線ベクトルであるから，$(4+4+1)r^2=1$ より $r=\pm\dfrac{1}{3}$ となる。従って単位法線ベクトルは $\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)$ または $\left(-\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$ である。