## 課題 IIA　解答例

力学の基礎である等加速度運動と等速度運動を理解しているかどうかを問う問題です．粒子に一定の力を及ぼす領域の中では粒子は等加速度運動，領域の外では力が働かないため粒子は等速度運動をします．

問１　力を及ぼす領域に粒子が入る時刻を $t_0$，この領域から出る時刻を $t_1$ とすると，

$0 \leqq t < t_0 = x_0/v_0$ のとき $v = v_0$，$x = v_0 t$.

$t_0 \leqq t \leqq t_1$ のとき $v = v_0 + (F/m)(t - t_0)$

$$x = x_0 + v_0(t - \frac{x_0}{v_0}) + \frac{F}{2m}(t - \frac{x_0}{v_0})^2$$

時刻 $t_1$ は $d = v_0(t - x_0/v_0) + [F/(2m)](t - x_0/v_0)^2$ の解として以下のように求まる．

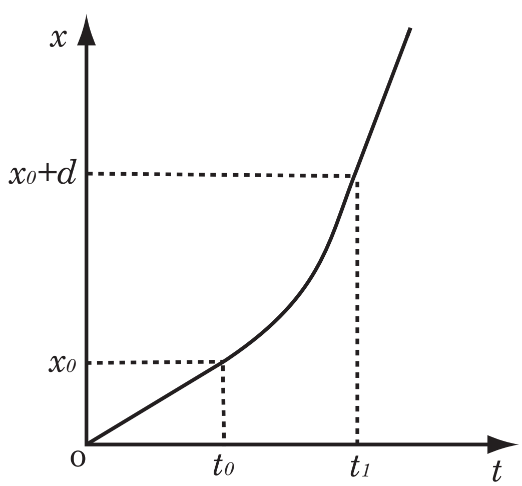
$$t_1 = \frac{x_0}{v_0} + \frac{m}{F}(\sqrt{v_0^2 + \frac{2Fd}{m}} - v_0)$$

したがって，$t_1 < t$ のとき

$$v = v_0 + \frac{F}{m}(t_1 - t_0) = \sqrt{v_0^2 + \frac{2Fd}{m}}$$

$$x = x_0 + d + \sqrt{v_0^2 + \frac{2Fd}{m}}(t - t_1)$$

別解：粒子は力を及ぼす領域の中で $Fd$ の仕事をされる．したがって，領域から出てくるときの速度 $v_1$ はエネルギー保存則 $mv_0^2/2 + Fd = mv_1^2/2$ から求めることができる．この $v_1$ を用いると時刻 $t_1$ は $v_1 - v_0 = (F/m)(t_1 - t_0)$ を解いて求まる．




$0 < t < t_0$，$t_1 < t$ では直線，$t_0 \leqq t \leqq t_1$ では放物線．$t = t_0$ と $t = t_1$ では直線と放物線の傾きが等しい．

問２　(1) 粒子は，力を及ぼす領域に入ると $x$ 軸正方向の力を受けて，まず減速される．エネルギー保存則より $mv_0^2/2 - Fd > 0$ なら粒子は力を及ぼす領域を通り抜けることができる．この条件は

$$v_0 > \sqrt{\frac{2Fd}{m}}$$

と書くこともできる．

(2) 粒子は力を及ぼす領域の中で減速された後，$x$ 軸正方向に加速され，領域から出て右向きに一定速度で運動するようになる．

力を及ぼす領域に粒子が入る時刻を $t = t_0$，出る時刻を $t = t_1$ とすると
$t_0 \leqq t \leqq t_1$ のとき粒子の速度は

$$v = -v_0 + \frac{F}{m}(t - t_0).$$

位置は

$$x = -x_0 - v_0(t - t_0) + \frac{F}{2m}(t - t_0)^2.$$

粒子が領域を出る時刻は $-v_0(t - t_0) + [F/(2m)](t - t_0)^2 = 0$ を解いて

$$t_1 = t_0 + \frac{2m}{F}v_0.$$

したがって力を及ぼす領域から粒子が右向きに出てきたときの速度は

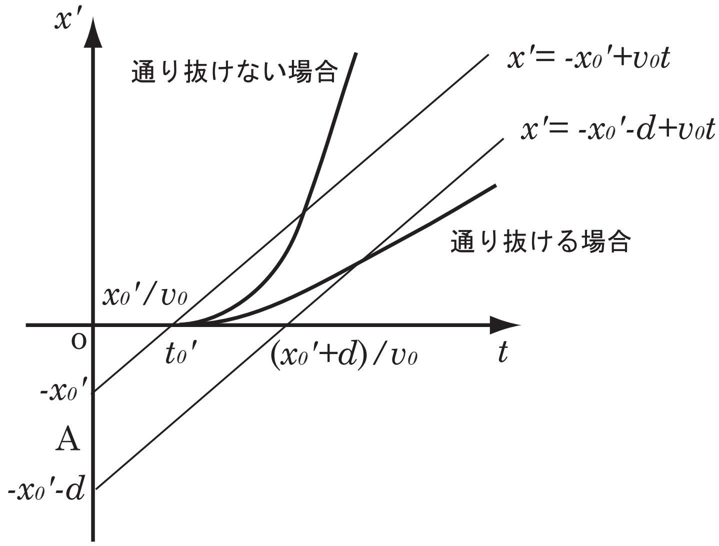
$$v = -v_0 + \frac{F}{m}(t_1 - t_0) = v_0.$$

* 別解１：粒子が減速されて速度が 0 になる位置を $x = -x_0 - h$ とすると，エネルギー保存則より $mv_0^2/2 - Fh = 0$．粒子の速度が 0 になった後，力を及ぼす領域を抜け出すまでの間に粒子は $Fh$ だけの仕事をされるから，粒子が領域を抜け出したときの速度を $v_1$ とすると $mv_1^2/2 = Fh$．したがって $v_1 = v_0$．
* 別解２：領域内で粒子は加速度 $F/m$ の等加速度運動をするから，粒子が領域を右向きに抜け出してきたときの速さを $v_1$ とすると
$v_1^2 - v_0^2 = 2(F/m) \times 0 = 0$．したがって $v_1 = v_0$．
* 「力学的エネルギーの保存則より，力を及ぼす領域から粒子が右向きに出てきたときの速度は $v = v_0$」という答も正解とする．

問３　問２を粒子の初速度と同じ速度で等速度運動している観測者の立場から考え，力を及ぼす領域が動いている場合に，この領域を通る粒子がどのように運動するかを考察する問題です．

(1) $-x_0' - d + v_0 t \leqq x' \leqq -x_0' + v_0 t.$

(2) 粒子は時刻 $t_0' = x_0'/v_0$ に領域 A に入った後，加速度 $F/m$ の等加速度運動をする．粒子の位置は $x' = [F/(2m)](t - t_0')^2$ のようにあらわすことができ，$(t, x')$ 面上で放物線を描く．この放物線と領域 A の左端の位置をあらわす直線 $x' = -x_0' - d + v_0 t$ が交点を持つ場合，粒子は領域 A を通り抜けることができる．




(a) 粒子が領域 A を通り抜ける場合
粒子が領域 A から出てきたときの速度は問 2 (1) で粒子が領域から出てきたときの速度 $v_1$ に $v_0$ を加えることによって求まる．$mv_1^2/2 = mv_0^2/2 - Fd$ より，$v_1 = -\sqrt{v_0^2 - 2Fd/m}$．したがって求める速度は

$$v = v_0 - \sqrt{v_0^2 - \frac{2Fd}{m}}.$$

粒子が領域 A を出る時刻は

$$t = \frac{x_0'}{v_0} + \frac{m}{F}(v_0 - \sqrt{v_0^2 - \frac{2Fd}{m}}).$$

別解：粒子が領域 A を通り抜けて出てくる時刻 $t_1$ は

$$\frac{F}{2m}(t_1 - t_0')^2 = -x_0' - d + v_0 t_1 = -d + v_0(t_1 - t_0')$$

を解くことによって求まり，

$$t_1 = t_0' + \frac{m}{F}(v_0 - \sqrt{v_0^2 - \frac{2Fd}{m}}).$$

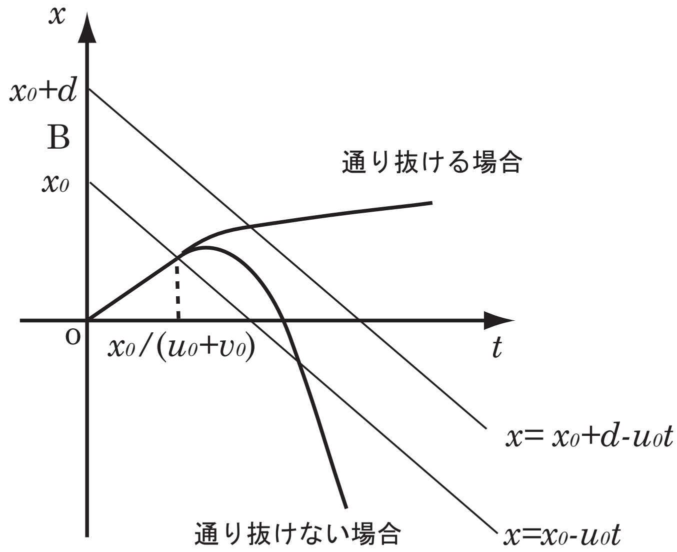
したがって粒子が出てくるときの速度は

$$v = \frac{F}{m}(t_1 - t_0') = v_0 - \sqrt{v_0^2 - \frac{2Fd}{m}}.$$

(b) 粒子が領域 A を通り抜けない場合
粒子が領域 A から出てきたときの速度は問 2 (2) で粒子が反射されて領域から出てきたときの速度 $v_0$ に $v_0$ を加えることによって求まる．よって，粒子は速さ $v = 2v_0$ で $x$ 軸正方向に運動する．粒子が領域 A を出る時刻は

$$t = \frac{x_0'}{v_0} + \frac{m}{F}(2v_0)$$

問４ $x$ 軸負方向に一定速度 $-u_0$ で動く観測者から見ると，静止した力を及ぼす領域に粒子が $u_0+v_0$ の速度で入ることになり，問２と同様に考えることができる．




(a) 粒子が領域 B を通り抜ける場合

粒子が領域を通り抜けて出てきたときの速さ $v_1$ は力を及ぼす領域が静止した系で $mv_1^2/2=m(u_0+v_0)^2/2-Fd$ より

$$v_1=\sqrt{(u_0+v_0)^2-\frac{2Fd}{m}}.$$

したがって，力を及ぼす領域が一定速度 $-u_0$ で動いている系では

$$v=\sqrt{(u_0+v_0)^2-\frac{2Fd}{m}}-u_0$$

このとき粒子が領域 B から抜け出てくる時刻は

$$t=\frac{x_0}{u_0+v_0}+\frac{m}{F}\left[u_0+v_0-\sqrt{(u_0+v_0)^2-\frac{2Fd}{m}}\right]$$

(b) 粒子が領域 B を通り抜けない場合

粒子が領域 B を通り抜けない場合，粒子は領域 B で反射され，領域 B が静止している観測者から見て速度 $-(u_0+v_0)$ で左向きに等速度運動する．領域 B が速度 $-u_0$ で動いている系ではこの速度は $v=-v_0-2u_0$ になる．このとき，粒子が領域 B を出る時刻 $t_B$ は

$$t_B=\frac{x_0}{u_0+v_0}+\frac{2m}{F}(u_0+v_0).$$

問５ 粒子に力を及ぼすふたつの領域が接近してくるとき，この間を運動する粒子の運動を考察する問題です．粒子はいずれかの領域で反射される毎に $2u_0$ ずつ加速され，粒子の速度が十分速くなると力を及ぼす領域を通り抜けて飛び出してくることになります．

(1) 粒子が領域 B で１回目に反射されるための条件は $m(u_0+v_0)^2/2 < Fd$．領域 B で反射された後の速度は問４より，$-v_0-2u_0$．領域 A が静止している観測者から見ると粒子は速度 $-v_0-3u_0$ で領域 A に入る．したがって，粒子が領域 A を通り抜ける条件は $m(-v_0-3u_0)^2/2 > Fd$．求める条件は，

$$\frac{1}{2}m(u_0+v_0)^2 < Fd < \frac{1}{2}m(v_0+3u_0)^2$$

粒子が領域 A を出てきたときの速度は，領域 A が静止している系で

$$\frac{m}{2}v^2 = \frac{m}{2}(-v_0-3u_0)^2 - Fd$$

より

$$v = -\sqrt{(v_0+3u_0)^2 - \frac{2Fd}{m}}.$$

したがって，力を及ぼす領域 A が一定速度 $u_0$ で動いている系では

$$v = u_0 - \sqrt{(v_0+3u_0)^2 - \frac{2Fd}{m}}$$

(2) 粒子が領域 B に $n$ 回目に入射するときの速度は $v_0+(4n-4)u_0$．したがって，粒子が領域 B で $n$ 回目に反射されるための条件は $m[v_0+(4n-3)u_0]^2/2 < Fd$．反射された後の粒子の速度は $-v_0-(4n-2)u_0$．領域 A が静止している観測者から見ると粒子は速度 $-v_0-(4n-1)u_0$ で領域 A に入る．したがって，粒子が領域 A を通り抜ける条件は $m[-v_0-(4n-1)u_0]^2/2 > Fd$．求める条件は，

$$\frac{1}{2}m[v_0+(4n-3)u_0]^2 < Fd < \frac{1}{2}m[v_0+(4n-1)u_0]^2$$

粒子が領域 A を出てきたときの速度は，領域 A が静止している系で

$$\frac{m}{2}v^2 = \frac{m}{2}[-v_0-(4n-1)u_0]^2 - Fd$$

より

$$v = -\sqrt{[v_0+(4n-1)u_0]^2 - \frac{2Fd}{m}}.$$

したがって，力を及ぼす領域 A が一定速度 $u_0$ で動いている系では

$$v = u_0 - \sqrt{[v_0+(4n-1)u_0]^2 - \frac{2Fd}{m}}.$$

(3) 次図のようになる.