

[II-A] 略解

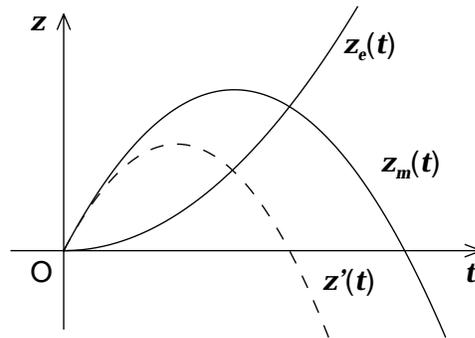
問1 [配点 (a) と (b) で 15 点、(c) と (d) で 15 点。計 30 点]

(a) 等加速度運動の式より

$$z_m(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t \quad (1)$$

$$z_e(t) = \frac{a}{2}t^2 \quad (2)$$

$$z'(t) = z_m(t) - z_e(t) = -\frac{g+a}{2}t^2 + v_0 t \quad (3)$$



(b) $z'(t)$ は加速度が $-(g+a)$ なので、重力が mg から $m(g+a)$ にかわったように見える。

(c) 時刻 t での速度は、静止系では $-gt + v_0$ 、エレベータ系では $-(g+a)t + v_0$ である。したがって時刻 t_1 と t_2 間の運動エネルギーの変化は、

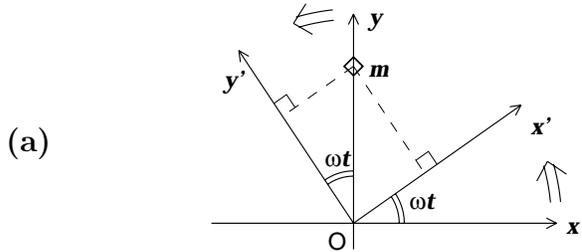
$$\begin{aligned} \text{静止系: } & \frac{m}{2} [(-gt_2 + v_0)^2 - (-gt_1 + v_0)^2] \\ & = mg \left[\left(-\frac{g}{2}t_1^2 + v_0 t_1 \right) - \left(-\frac{g}{2}t_2^2 + v_0 t_2 \right) \right] \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{エレベータ系: } & \frac{m}{2} \{ [-(g+a)t_2 + v_0]^2 - [-(g+a)t_1 + v_0]^2 \} \\ & = m(g+a) \left[\left(-\frac{g+a}{2}t_1^2 + v_0 t_1 \right) - \left(-\frac{g+a}{2}t_2^2 + v_0 t_2 \right) \right] \quad (5) \end{aligned}$$

静止系での答えで g を $g+a$ に置き換えるとエレベータ系での答えになる。

(d) (c) の運動エネルギーの増加は静止系では $mg[z_m(t_1) - z_m(t_2)]$ に等しい。時刻 t での位置エネルギーを $mgz_m(t)$ と定義すれば、力学的エネルギーは保存する。エレベータ系では位置エネルギーを $m(g+a)z'(t)$ と定義すればよい。

[問2] [配点 (a) と (b) は 5 点、(b) と (d) は 15 点、残り 10 点。計 70 点。]

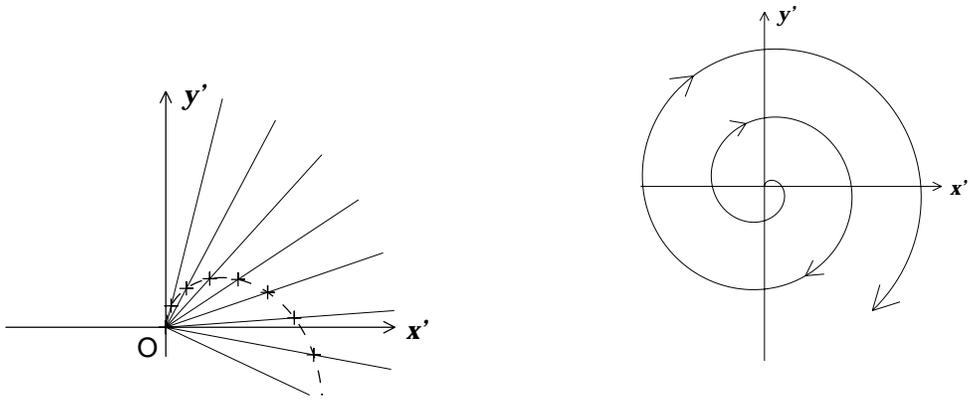


時刻 t での xy 系と $x'y'$ 系は左図の通り。

$$x'(t) = v_0 t \sin \omega t \quad (6)$$

$$y'(t) = v_0 t \cos \omega t \quad (7)$$

(b) $\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = v_0 t$ より t に比例して原点から離れる。 $x'y'$ 系では、毎秒 $-\omega$ で回転しながら毎秒 v_0 だけ原点から離れる。



(c) (a) の $[x'(t), y'(t)]$ の表式を微分して

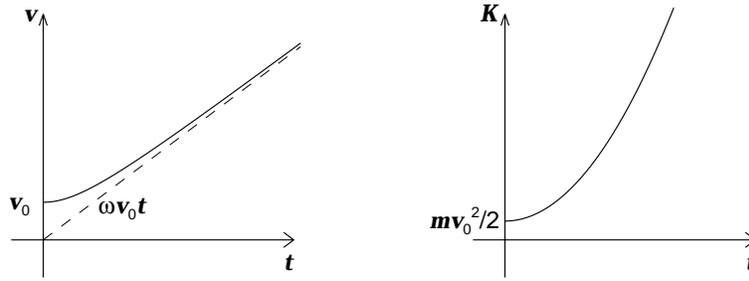
$$v'_x(t) = \frac{dx'(t)}{dt} = v_0 [\sin \omega t + \omega t \cos \omega t] \quad (8)$$

$$v'_y(t) = \frac{dy'(t)}{dt} = v_0 [\cos \omega t - \omega t \sin \omega t] \quad (9)$$

$$t \text{ での速さ} = [v'_x(t)^2 + v'_y(t)^2]^{1/2} = v_0 \sqrt{1 + \omega^2 t^2} \quad (10)$$

$$t \text{ での運動エネルギー } (K) = \frac{m}{2} v_0^2 (1 + \omega^2 t^2) \quad (11)$$

[速度は y 方向の v_0 とそれに垂直方向の $r\omega = v_0t\omega$ の合成から求めてもよい。]



(d) x' 軸を横切るのは $y'(t) = v_0t \cos \omega t = 0$ の時。 $\cos \omega t = 0$ より、 $\omega t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$

	回数	時刻	横切る位置
	1 回目	$t_1 = \frac{\pi}{2\omega}$	$x_1 = \frac{\pi}{2\omega} v_0$
$x' > 0$ の範囲では	2 回目	$t_2 = \frac{5\pi}{2\omega}$	$x_1 = \frac{5\pi}{2\omega} v_0$
	3 回目	$t_3 = \frac{9\pi}{2\omega}$	$x_1 = \frac{9\pi}{2\omega} v_0$
	n 回目	$t_n = \frac{(4n-3)\pi}{2\omega}$	$x_1 = \frac{(4n-3)\pi}{2\omega} v_0$

これらの時刻 t_1, t_2, t_3, \dots では $\cos \omega t_n = 0, \sin \omega t_n = 1$ であるから、

$$v'_x(t_n) = v_0 \quad (12)$$

$$v'_y(t_n) = -v_0\omega t_n \quad (13)$$

(x' 成分は n によらず一定、 v'_y は t_n とともに増える。) 次第に $v'(t_n)$ は y' 軸に反平行になる。

(e) (c) の運動エネルギーの式に (d) の t_n, t_{n+1} を代入して

$$K(t_{n+1}) - K(t_n) = \frac{m}{2} v_0^2 \omega^2 (t_{n+1}^2 - t_n^2) \quad (14)$$

$$= m v_0^2 (4n-1) \pi^2 \quad (15)$$

運動エネルギーの増加量は ω によらない。

- (f) 運動エネルギーの増加の式に表れる $v_0 t_{n+1}$, $v_0 t_0$ は原点からの距離であることに着目すると、

$$K(t_{n+1}) - K(t_n) = \frac{m\omega^2}{2} [r^2(t_{n+1}) - r^2(t_n)] \quad (16)$$

という形が得られる。これは

$$K(t_n) - \frac{m\omega^2 r^2(t_n)}{2} \quad (17)$$

が保存することを意味している。従って位置エネルギーを $U = -\frac{m\omega^2 r^2}{2}$ と定義すれば力学的エネルギーは保存する。この式を任意の時刻 t で使うと、

$$K(t) + U(t) = \frac{mv_0^2}{2} (1 + \omega^2 t^2) - \frac{m\omega^2}{2} r^2(t) \quad (18)$$

$$= \frac{mv_0^2}{2} \quad (19)$$

となって、いつも力学的エネルギーは保存する。

- (g) $[x'(t), y'(t)] = v_0 t (\sin \omega t, \cos \omega t)$ を微分して速度 $\mathbf{v}'(t)$ と加速度 $\mathbf{a}'(t)$ と加速度を求める。

$$\mathbf{v}'(t) = \frac{d}{dt} [x'(t), y'(t)] \quad (20)$$

$$= v_0 (\sin \omega t, \cos \omega t) + v_0 \omega t (\cos \omega t, -\sin \omega t) \quad (21)$$

$$= v_0 \hat{\mathbf{r}}' + v_0 \omega t \hat{\boldsymbol{\theta}}' \quad (22)$$

$$\mathbf{a}'(t) = 2v_0 \omega (\cos \omega t, -\sin \omega t) - v_0 \omega^2 t (\sin \omega t, \cos \omega t) \quad (23)$$

$$= 2v_0 \omega \hat{\boldsymbol{\theta}}' - v_0 \omega^2 t \hat{\mathbf{r}}' \quad (24)$$

$$= \frac{\mathbf{f}'}{m} \quad (25)$$

ここで $\hat{\mathbf{r}}' = (\sin \omega t, \cos \omega t)$ は y -軸方向の単位ベクトル。つまり $x'y'$ 系の動径方向の単位ベクトル。また $\hat{\boldsymbol{\theta}}' = (\cos \omega t, -\sin \omega t)$ は x -軸方向の単位ベクトル。つまり $\hat{\mathbf{r}}'$ に垂直。

$x'y'$ 系で働いていると見られる力 \mathbf{f}' は、

$$\mathbf{f}' = 2mv_0 \omega \hat{\boldsymbol{\theta}}' - mv_0 \omega^2 t \hat{\mathbf{r}}' \quad (26)$$

(上式の右辺第1項は $\hat{\mathbf{r}}'$ に垂直、第2項は遠心力でなく向心力。)

x' 軸の正の部分切る瞬間は、 $y' = 0$ より $\cos \omega t = 0$, $\sin \omega t = 1$ なので

$$\mathbf{a}'(t_n) = 2v_0 \omega (0, -1) - v_0 \omega^2 t_n (1, 0) = \frac{\mathbf{f}'(t_n)}{m} \quad (27)$$

y' 方向の成分は n によらないが、 x' 方向の成分は切る度に次第に大きくなる。
 y' 方向の力を x' 方向と軌道に垂直な方向に分ける。時刻 t_n での軌道は、

$$\boldsymbol{v}'(t_n) = v_0(1, -\omega t_n) \quad (28)$$

なので、軌道と垂直な向きは $(\omega t_n, 1)$ 。

$$(0, -1) = \omega t_n(1, 0) - (\omega t_n, 1) \quad (29)$$

を利用すると

$$\boldsymbol{f}'(t_n) = mv_0\omega^2 t_n(1, 0) - 2mv_0\omega(\omega t_n, 1) \quad (30)$$

と表すことができる。この式は力 f が、第1項の遠心力と第2項の軌道に垂直な力(コリオリ力)から成り立っていることを表している。軌道に垂直な力は仕事をしないので、位置エネルギーには表れない。この力は軌道を右手に曲げようとする。

- 位置エネルギーは原点からの距離に比例する遠心力を表す。
- 位置エネルギーから見ると遠心力なのに、 f' を求めると、一見遠心力が働いているようにはみえず不思議である。
- 進行方向に垂直に右手に働く力があって、これは仕事には関係しないので位置エネルギーには表れない。

などがあれば満点でしょう。 f' を分解して遠心力が表れることが言えていれば満々点。