解答

[1]

(1) $x(x-1)(x-2)=3\cdot2\cdot1$ より、$x=3$ は 1 つの解である。よって、$(x-3)$ は $x(x-1)(x-2)-6$ の因数であり、

$$x(x-1)(x-2)-6=(x-3)(x^2+2)=0$$

より、$x=3,\ \pm\sqrt{2}\,i$。

(2)

$$\begin{aligned}(1-\sqrt{3}i)^2/(1+\sqrt{3}i) &= (1-\sqrt{3}i)^3/[1-(-3)]\\ &= [1-3\times\sqrt{3}i+3\times(-3)-(-3)\times\sqrt{3}i]/4\\ &= (1-9)/4\\ &= -2\end{aligned}$$

(3) ア）1 の位が偶数である場合だから、4/9

イ）99 までに 3 の倍数は 33 ある。その内、9 以下のもの 3 つと、1 の位が 0 のもの 3 つ、数字が重なるもの（ $33,66,99$ ） 3 つを差し引くと全てで 24 通りだから、$24/(8\times9)=1/3$

(4)

$$\begin{aligned}A^2-B^2 &= (a^2+2ab+b^2-4ab)/4\\ &= (a-b)^2/4\geqq 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B^2-C^2 &= ab-(2ab/(a+b))^2\\ &= ab((a+b)^2-4ab)/(a+b)^2\\ &= ab(a-b)^2/(a+b)^2\geqq 0\end{aligned}$$

(5) 余弦定理より，$AC^2=5^2+3^2-2\times5\times3\cos120^\circ=49$ $AC>0$ だから，$AC=7$

再び余弦定理により，$\cos D=(5^2+8^2-7^2)/(2\times5\times8)=1/2$ よって，$\angle D=60^\circ$

(6) $a_{n+1}-a_n=a_n-a_{n-1}=\cdots\cdots=a_1-a_0=1$ だから，次式を得る。

$$a_n=a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})=n$$

[2]

$\vec{p} = (1-t)\,\vec{a} + t\,\vec{b}$ とおく。$\mathrm{OP} \perp \mathrm{AB}$ より、

$$\begin{aligned} \vec{p}\cdot(\vec{b}-\vec{a}) &= \left\{(1-t)\,\vec{a} + t\,\vec{b}\right\}\cdot(\vec{b}-\vec{a}) \\ &= t\,(\vec{b}\cdot\vec{b}) + (1-2t)(\vec{a}\cdot\vec{b}) - (1-t)\,(\vec{a}\cdot\vec{a}) \\ &= t\left\{(\vec{b}\cdot\vec{b}) - 2\,(\vec{a}\cdot\vec{b}) + (\vec{a}\cdot\vec{a})\right\} + (\vec{a}\cdot\vec{b}) - (\vec{a}\cdot\vec{a}) \\ &= t\,|\,\vec{b}-\vec{a}\,|^2 + (\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{a})) \\ &= 0 \end{aligned}$$

なので、これを解いて、

$$t = -\frac{\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{a})}{|\,\vec{b}-\vec{a}\,|^2}。$$

よって、

$$\vec{p} = \frac{1}{|\,\vec{b}-\vec{a}\,|^2}\left\{(\vec{b}\cdot(\vec{b}-\vec{a}))\,\vec{a} - (\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{a}))\,\vec{b}\right\}。$$

（$|\,\vec{p}\,|^2$ の t に関する極値を求めてもよい。）

[3]

(1)

$$\int_0^2 x(x-a)^2\,dx = \int_0^2 (x^3 - 2ax^2 + a^2x)\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}ax^3 + \frac{1}{2}a^2x^2\right]_{x=0}^{2} = 4 - \frac{16}{3}a + 2a^2$$

(2) $f(a) = 4 - \frac{16}{3}a + 2a^2$ とおく。

$$f'(a) = 4a - \frac{16}{3}$$

故に、$a = 4/3$ で極値をとる。これは、$0 \leqq a \leqq 2$ の範囲にあり、しかも、$f(a)$ は２次関数であるから、$a = 4/3$ で最小値である。その値は $f(4/3) = 4 - 64/9 + 32/9 = 4/9.$