課題ⅡＡ　略解

【出題のねらい】

電場や磁場を使って、電子の速度を測定する“エネルギー分析器”の動作を考える問題です。通常、入りロスリットに電子を打ち込んで、特定の電場ないし磁場中を通過して出ロスリットから飛び出す電子を検出します。このとき、電場ないしは磁場の大きさに依存した特定の速度の電子のみが検出されることになります。

エネルギー分析器の中を電子が通るときの軌道を求める問題は通常の入試問題でも見受けられますが、実は、実際の実験を行う場合は、軌道だけを考えていては不十分で、入ロスリットに電子を打ち込む方向の誤差も気にする必要があります。完全に特定の方向を向いた電子ビームというのは存在せず、かならず角度の誤差がつきまとうからです。同じ速度だが小さな角度だけ方向がずれた電子はどのような軌道を描くでしょうか？　通常は、軌道は出ロスリットを通らなくなるので検出できません。すると、たまたま正しい方向を向いたごくわずかの電子しか測定できず、極めて非効率な実験になってしまいます。そこで、実際の分析器では、角度が少々ずれても同じ出ロスリットに到達するように、電子ビームを収束させることが考慮されています。本問はそのような電子の軌道のズレと収束効果を検討する問題となっています。

見かけは電磁気の出題のように見えますが、実際は、オーソドックスな力学の問題です。身近な例でたとえると本質は次の問題のようになります。“前方にある的にボールを投げるとき、投げ出すボールの速度と方向には誤差があります。誤差を考慮したとき、どのような速度と角度で投げると的に当たる確率を高めることができますか？”

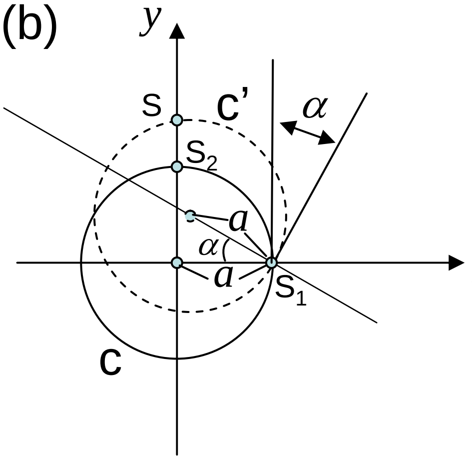
近似計算を行うところが高校生諸君にはなじみがうすいと思いますが、問1に関しては、2つの円の幾何的な配置に気がつけば、問題文にある近似公式を用いて丁寧に計算すると答えがでるようになっています。問2は、問題で誘導してあるように微分を用いた方が解きやすくなっています。また、三角関数の公式と近似公式を使ってゴリゴリと計算しないといけない問もあります。力学の理解に加えて、計算の腕力も試される問題であり、難易度もかなり高くなっています。

問1

(a) $$ev_0B_0 = \frac{mv_0^{\ 2}}{a} \qquad v_0 = \frac{eaB_0}{m}$$

磁場から働くローレンツ力が向心力となって円軌道を描きます。

(b)



α傾いて入射した電子の円軌道は

$$C':\{x-a(1-\cos\alpha)\}^2+\{y-a\sin\alpha\}^2=a^2$$

で与えられる。

C'とy軸との交点が$S(0,a+l)$となるから、

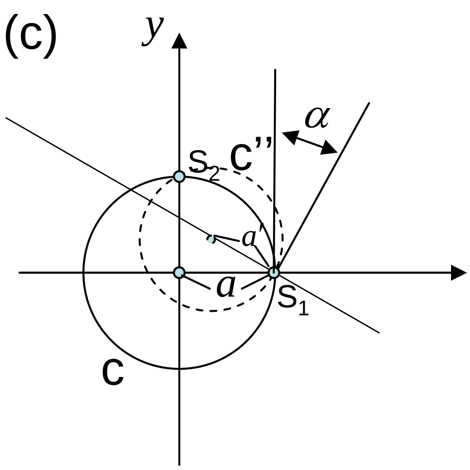
$$\{0-a(1-\cos\alpha)\}^2+\{a+l-a\sin\alpha\}^2=a^2$$より

$$l=a\sqrt{2\cos\alpha-\cos^2\alpha}+a\sin\alpha-a$$

$\cos\alpha \approx 1-\frac{1}{2}\alpha^2, \sin\alpha \approx \alpha-\frac{1}{6}\alpha^3$を用いて近似すると、

$$l \approx a\sqrt{1-\frac{1}{4}\alpha^4}+a(\alpha-\frac{1}{6}\alpha^3)-a \approx a\alpha$$

(c)



α傾いて入射したにも関わらず出射スリット孔に到達する電子の軌道をC''とすると、これは半径$a'=\frac{m(v_0+u)}{eB_0}$の円軌道となる。

$\alpha=0$のときの軌道CとC''の交点がS_1とS_2であれば良い。

$$C'':\{x-(a-a'\cos\alpha)\}^2+\{y-a'\sin\alpha\}^2=a'^2$$

C''とy軸との交点が$S_2(0,a)$となるから、

$(a-a'\cos\alpha)^2+\{a-a'\sin\alpha\}^2=a'^2$を満たす。

これを解くと

$$a'=\frac{a}{\sin\alpha+\cos\alpha}$$

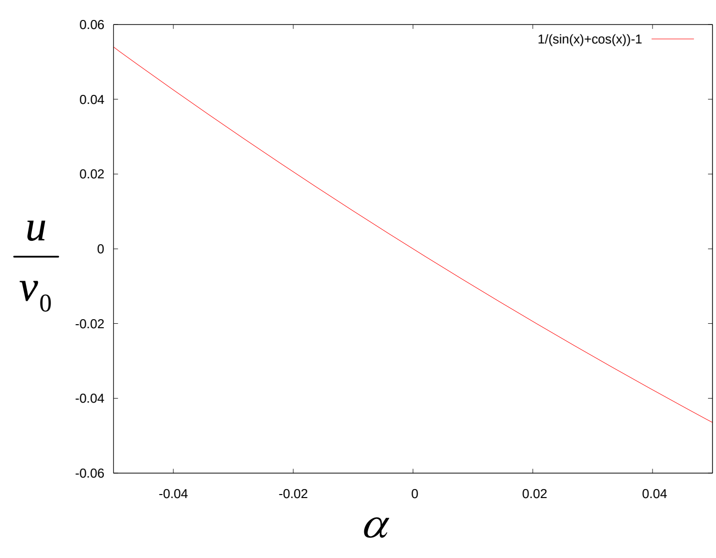
よって

$$a'=\frac{m(v_0+u)}{eB_0}=\frac{mv_0}{eB_0}\cdot\frac{1}{\sin\alpha+\cos\alpha}$$

$$\frac{u}{v_0}=\frac{1}{\sin\alpha+\cos\alpha}-1$$

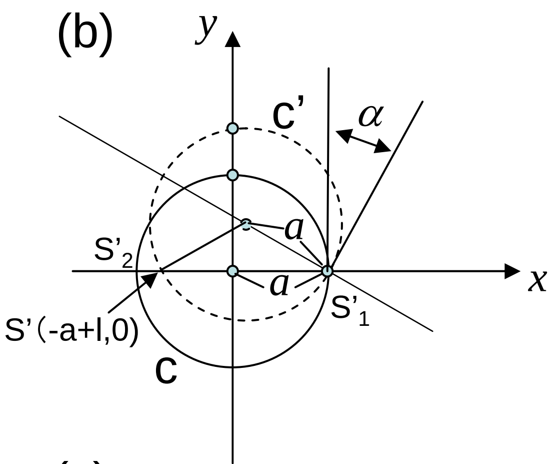
(d) (c)の結果に代入すると

$$v_{\max} \approx 1.05v_0$$
$$v_{\min} \approx 0.95v_0$$
$$\therefore \frac{v_{\max}-v_{\min}}{v_0} \approx 0.1$$



(e) （b）ー（d）の項目に関して同様に解く。

(b)

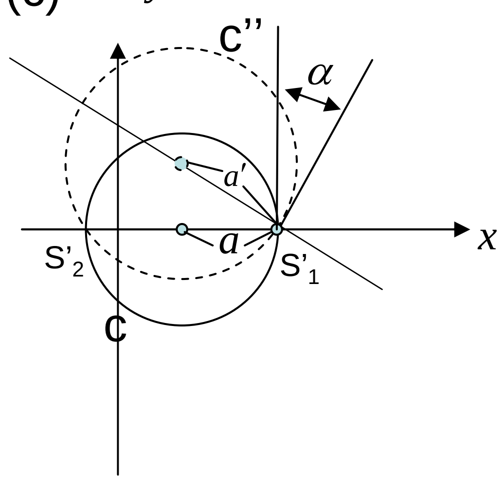


図のような同じ半径を持つ円C’とx軸との交点が、もとの出射スリット孔からどれだけずれるか求めればよい。

$$S' = (-a + l, 0) = (a - 2a\cos\alpha, 0)$$

$$l = 2a(1 - \cos\alpha) \approx a\alpha^2$$

(c)



図のような異なる半径の円C’’がもとの円Cと入射スリット孔と出射スリット孔の2点で交差していればよい。

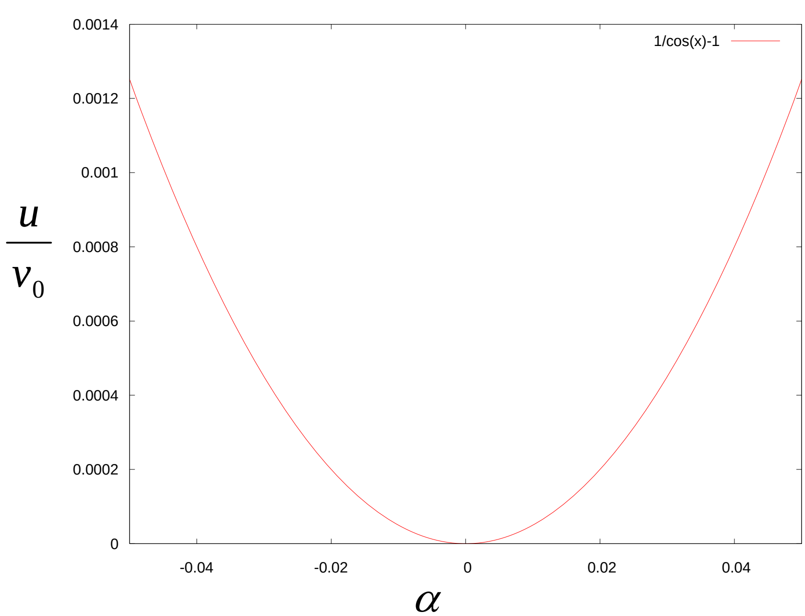
$a'\cos\alpha = a$ より

$$\frac{m(v_0 + u)}{eB_0}\cos\alpha = \frac{mv_0}{eB_0}$$

$$v_0 + u = \frac{v_0}{\cos\alpha}$$

$$\frac{u}{v_0} = \frac{1}{\cos\alpha} - 1$$

(d) (c)の結果に代入すると



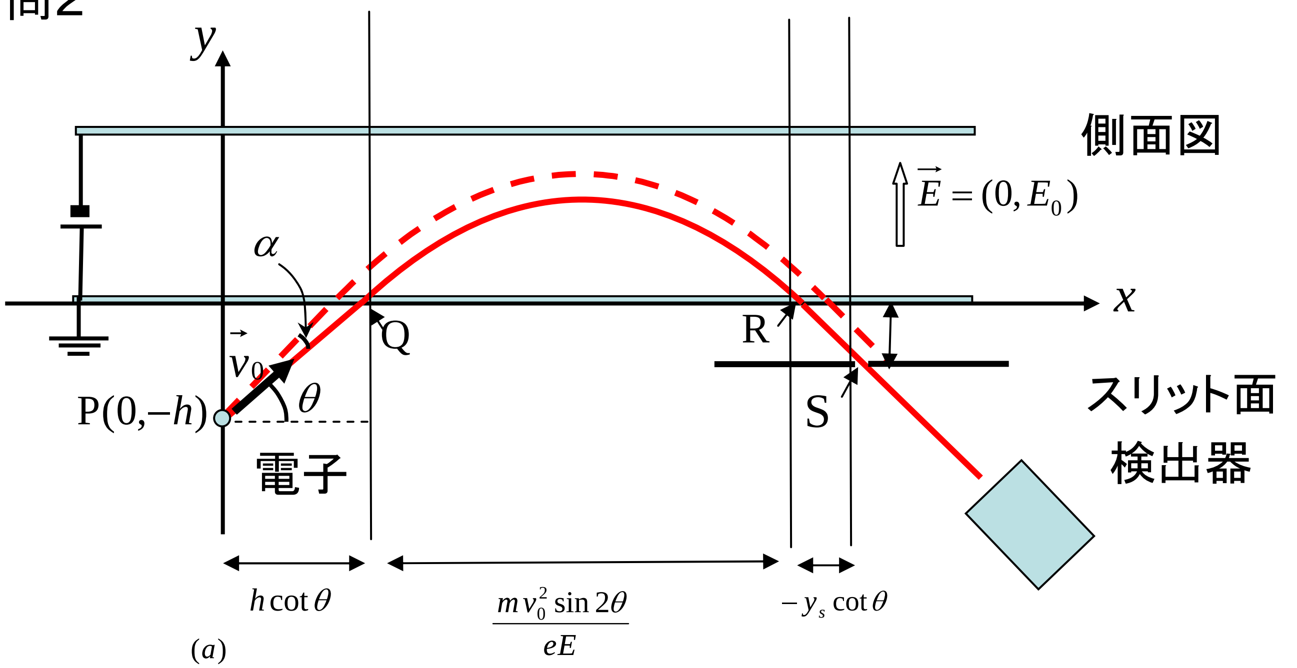
$$v_{\max} \approx 1.00125 v_0$$

$$v_{\min} \approx v_0$$

$$\therefore \frac{v_{\max} - v_{\min}}{v_0} \approx 0.00125$$

以上のように大幅に測定誤差が改善される。

問2



(a)

Sの座標を(x_S, y_S)とする

PQ間のx軸方向の移動量は、$h\cot\theta$

RS間のx軸方向の移動量は、$-y_S\cot\theta$

QR間のx軸方向の移動量は$\dfrac{mv_0^2}{eE}\sin 2\theta$

(詳細略。角度θで投げたボールの到達距離を求める問題で、
重力加速度をeE_0/mとした場合に対応する。)

すると、

$$x_S=(h-y_S)\cot\theta+\frac{mv_0^2}{eE_0}\sin 2\theta \quad (1)$$

$y_S=$一定と見て、$\dfrac{dx_S}{d\theta}=0$となれば1次の収束。

$$\frac{dx_S}{d\theta}=-(h-y_S)/\sin^2\theta+\frac{2mv_0^2}{eE_0}\cos 2\theta=0$$

$$(h-y_S)=\frac{2mv_0^2}{eE_0}\cos 2\theta\sin^2\theta \quad (2)$$

(1)に代入して、

$$x_S=\frac{2mv_0^2}{eE_0}\cos 2\theta\sin\theta\cos\theta+\frac{mv_0^2}{eE_0}\sin 2\theta$$

$$=\frac{mv_0^2}{eE_0}\sin 2\theta(1+\cos 2\theta)$$

$$S=\left(\frac{mv_0^2}{eE_0}\sin 2\theta(1+\cos 2\theta),\ h-\frac{2mv_0^2}{eE_0}\cos 2\theta\sin^2\theta\right)$$

微分を用いない場合は、問１と同様にしてずれlを求め、αの一次の
項の係数が零となるとして解けばよい。

(b)

$\theta = \dfrac{\pi}{6}$の場合、スリット孔位置Sは$(\dfrac{3\sqrt{3}}{4}K_0, h - \dfrac{1}{4}K_0)$で与えられる。

但し、$K_0 = \dfrac{m{v_0}^2}{eE_0}$

速度 $v_0 + u$で、角度$\pi/6 + \alpha$で飛び出したときの軌道

$x = (h-y)\cot(\dfrac{\pi}{6}+\alpha) + K\sin 2(\dfrac{\pi}{6}+\alpha)$ （但し、$K = \dfrac{m(v_0+u)^2}{eE_0}$とする）

がスリット孔$(\dfrac{3\sqrt{3}}{4}K_0, h - \dfrac{1}{4}K_0)$を通る条件を考えればよい。

よって、

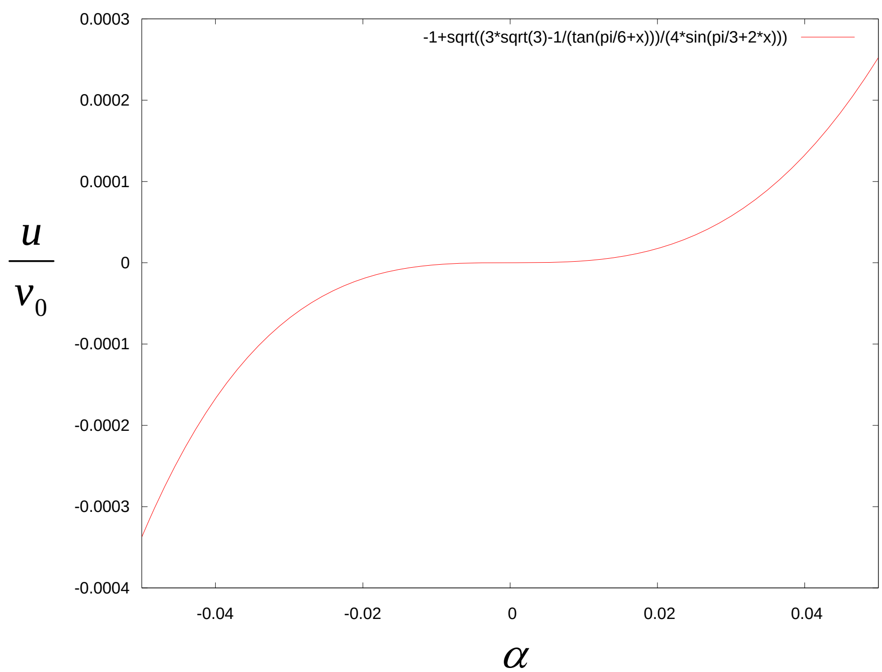
$$\frac{3\sqrt{3}}{4}K_0 = \frac{1}{4}K_0\cot(\frac{\pi}{6}+\alpha) + K\sin 2(\frac{\pi}{6}+\alpha)$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{4}\cot(\frac{\pi}{6}+\alpha) + \left(\frac{v_0+u}{v_0}\right)^2 \sin 2(\frac{\pi}{6}+\alpha)$$

$(\because K/K_0 = \left(\dfrac{v_0+u}{v_0}\right)^2)$

これを解くと、

$$\frac{u}{v_0} = \sqrt{\frac{3\sqrt{3} - \cot(\frac{\pi}{6}+\alpha)}{4\sin 2(\frac{\pi}{6}+\alpha)}} - 1$$



この関数の外形は図の通り。
単調な関数なので、uの最大値は
α=0.05のとき、最小値は-0.05のときとなる。
関数電卓で計算すると、誤差は
約0.0006程度となり、問1の半円型分析器より誤差が減少している。

(c)

$\theta=\pi/6$で飛び出したときの軌道１は

$$x=\sqrt{3}(h-y)+\frac{\sqrt{3}}{2}K_0$$

$\pi/6+\alpha$で飛び出したときの軌道２は

$$x=(h-y)\cot(\frac{\pi}{6}+\alpha)+K_0\sin 2(\frac{\pi}{6}+\alpha)$$

この軌道がスリット面上でSから距離lだけ離れた点に

到達する。すわわち軌道２は$(\frac{3\sqrt{3}}{4}K_0+l,h-\frac{1}{4}K_0)$を通る。

これを代入して整理すると、

$$l=\frac{1}{4}K_0\{-3\sqrt{3}+\cot(\frac{\pi}{6}+\alpha)+4\sin(\frac{\pi}{3}+2\alpha)\}$$

となる。

この結果から2次の収束性を示すには以下の3通りの解法がある。

(i)多項式展開

$$\cot(\frac{\pi}{6}+\alpha)=\frac{\cos(\frac{\pi}{6}+\alpha)}{\sin(\frac{\pi}{6}+\alpha)}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha}{\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha}$$

$$\approx\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\frac{1}{2}\alpha^2)-\frac{1}{2}(\alpha-\frac{1}{6}\alpha^3)}{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}\alpha^2)+\frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha-\frac{1}{6}\alpha^3)}=\frac{\sqrt{3}-\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha^2+\frac{1}{6}\alpha^3}{1+\sqrt{3}\alpha-\frac{1}{2}\alpha^2-\frac{\sqrt{3}}{6}\alpha^3}$$

問題の冒頭の近似公式の最後の式を利用して、分母を変形すると、

$$\approx\{\sqrt{3}-\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha^2+\frac{1}{6}\alpha^3\}\{1-\sqrt{3}\alpha+\frac{7}{2}\alpha^2-\frac{23\sqrt{3}}{6}\alpha^3\}$$

$$\approx\sqrt{3}-4\alpha+4\sqrt{3}\alpha^2-\frac{40}{3}\alpha^3$$

同様にして

$$\sin(\frac{\pi}{3}+2\alpha)\approx\frac{\sqrt{3}}{2}+\alpha-\sqrt{3}\alpha^2-\frac{2}{3}\alpha^3$$

となる。結局、

$l=-4K_0\alpha^3$となり、2次の収束性が得られている。

(ii)テーラー展開を知っていれば、2回微分を計算して解くことも可能。
問一の最後にあるように、
入射ビームのズレは
$l = l_1\alpha + l_2\alpha^2 + l_3\alpha^3 + l_4\alpha^4 \cdots$
と展開できる。実は、一般の関数は

$$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2!}f''(x_0)\Delta x^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)\Delta x^3 + \cdots$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} f^{(i)}(x_0)\Delta x^{\mathrm{i}}$$

のように展開できる。これは$x = x_0$における関数の値、1,2,3･･･次の
導関数の値を用いて、微少量Δxだけずれた$x = x + \Delta x$の関数の値を
求めることができることを示しており、このような展開を$Taylor$展開と言います。
これをlの展開式にあてはめると、

$l_1 = \left|\frac{dl}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}, l_2 = \left|\frac{d^2 l}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=0}, l_3 = \left|\frac{d^3 l}{d\alpha^3}\right|_{\alpha=0}, \cdots$となることがわかります。

ですから、一次の収束$(l_1 = 0)$では、$\left|\frac{dl}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$として解くことができたわけです。

二次の収束$(l_2 = 0)$では、$\left|\frac{d^2 l}{d\theta^2}\right|_{\alpha=0} = 2l_2 = 0$であることを示せばよい。

$$\frac{d^2 l}{d\theta^2} = \frac{K_0}{4}\left(\frac{2\cos(\frac{\pi}{6}+\alpha)}{\sin^3(\frac{\pi}{6}+\alpha)} - 16\sin(\frac{\pi}{3}+2\alpha)\right)$$

$\alpha = 0$を代入すると零となる。同様に$\left|\frac{d^3 l}{d\theta^3}\right|_{\alpha=0} = 6l_3$($l_3$は$\alpha^3$の係数）を計算して零でない
値をとることを示せばよい。
(iii)数値解法に関しては、θを例えば30°,31°,32°と変化したときのlを計算し、変化を
2次関数、3次関数と比較して考察すればよい。