略解

高校 2 年生までに習う種々の分野から出題しています。いずれも基本を理解していれば解答できる問題になっています。

[1]　(1) [有理化]

$$x+\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}+\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{1}+\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{1}=3-2\sqrt{2}+3+2\sqrt{2}=6$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2x\cdot\frac{1}{x}=6^2-2=34$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3x\cdot\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)=6^3-3\cdot 6=198$$

（$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab,\ a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ を用いる。）

(2) [対数]

$$\log_a 10^4=4\log_a 10=4\cdot\frac{\log_{10}10}{\log_{10}a}=\frac{4}{\log_{10}a}$$

を与式に代入すると，

$$\frac{4}{\log_{10}a}+\log_{10}a+4=0$$

より，

$$4+(\log_{10}a)^2+4\log_{10}a=0$$

これを解いて，$\log_{10}a=-2$。よって，

$$a=10^{-2}$$

(3) [確率]

- 1 回目で 1 人だけが勝ち残る確率: 誰が勝つかで 3 通り，どの手で勝つかで 3 通りあるから，
$$\frac{3\times 3}{3^3}=\frac{1}{3}$$
- 1 回目で 2 人が勝ち，2 回目でそのうちの 1 人が勝ち残る確率: 1 回目誰がどの手で負けるかで $3\times 3=9$ 通り，2 回目誰がどの手で勝つかで $2\times 3=6$ 通りあるから，
$$\frac{3\times 3}{3^3}\times\frac{2\times 3}{3^2}=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$$

- 1 回目あいこで，2 回目に 1 人だけが勝ち残る確率: 1 回目あいこの確率は $1 - 1/3 - 1/3 = 1/3$，2 回目で 1 人だけ勝つ確率は最初の場合と同じ $1/3$ だから，

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

以上より，求める確率は

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{3}$$

(4) [数学的帰納法]

(I) $n = 1$ のとき，

$$(\text{左辺}) = 1^2 = 1 \qquad (\text{右辺}) = 1^3 = 1$$

よって，与式は成り立つ。

(II) $n = k$ のとき，与式が成り立つと仮定すると，

$$(1 + 2 + \cdots + k)^2 = 1^3 + 2^3 + \cdots + k^3$$

$n = k + 1$ のときの左辺は，

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \{1 + 2 + \cdots + k + (k + 1)\}^2 \\ &= (1 + 2 + \cdots + k)^2 + 2\,(1 + 2 + \cdots + k)(k + 1) + (k + 1)^2\end{aligned}$$

ここで，第 2 項は，

$$2\,(1 + 2 + \cdots + k)(k + 1) = 2 \cdot \frac{k\,(k + 1)}{2} \cdot (k + 1) = k\,(k + 1)^2$$

であることに注意すると，

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= (1^3 + 2^3 + \cdots + k^3) + k\,(k + 1)^2 + (k + 1)^2 \\ &= 1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k + 1)^3\end{aligned}$$

これは，$n = k + 1$ のときの右辺である。よって，$n = k + 1$ のときも与式が成り立つ。

(I), (II) より，与式はすべての自然数 n について成り立つ。

(5) [ベクトル]

$\vec{a} + t\,\vec{b}$ と $\vec{a} - t\,\vec{b}$ が垂直であることから，

$$(\vec{a} + t\,\vec{b}) \cdot (\vec{a} - t\,\vec{b}) = |\vec{a}|^2 - t^2\,|\vec{b}|^2 = 0$$

$\vec{a}, \vec{b}$ は $\vec{0}$ でなく，$t > 0$ だから，

$$t = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$$

[2]　(1) [解の公式の導出]

2 次方程式の両辺を a で割って，

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

x の係数の半分の平方 $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ を両辺に加えて，

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

（公式を書いているだけでは 0 点。）

(2) [判別式]

$$mx^2 + 2x + m + 2 \leq -2$$

より，

$$mx^2 + 2x + m + 4 \leq 0$$

これが成り立つための条件は，$m < 0$，かつ，判別式 $D \leq 0$ となることだから，

$$D = 1 - m(m + 4) = -(m^2 + 4m - 1) \leq 0$$

これを満たす m の範囲は，

$$m \leq -2 - \sqrt{5} \qquad m \geq -2 + \sqrt{5}$$

$m < 0$ なので，

$$m \leq -2 - \sqrt{5}$$

[3]　(1) [積分]

$f(x) = x(x-2)(x-a)$ とおくと，$0 \leq x \leq a$ で $f(x) \geq 0$，$a \leq x \leq 2$ で $f(x) \leq 0$。よって，

$$\begin{aligned}\int_0^2 |f(x)|\,dx &= \int_0^a f(x)\,dx + \int_a^2 (-f(x))\,dx \\ &= \int_0^a f(x)\,dx + \int_2^a f(x)\,dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2+a}{3}x^3 + ax^2\right]_0^a + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2+a}{3}x^3 + ax^2\right]_2^a \\ &= 2\left(-\frac{a^4}{12} + \frac{a^3}{3}\right) - \left(\frac{4}{3}a - \frac{4}{3}\right) \\ &= -\frac{1}{6}(a^4 - 4a^3 + 8a - 8)\end{aligned}$$

(2) [最小値]

$f(a) = -\frac{1}{6}(a^4 - 4a^3 + 8a - 8)$ とおく，

$$f'(a) = -\frac{1}{6}(4a^3 - 12a^2 + 8) = -\frac{2}{3}(a-1)(a^2 - 2a - 2)$$

$f'(a) = 0$ より，$a = 1, 1 \pm \sqrt{3}$。$0 < a < 2$ だから，以下の増減表より，$f(a)$ を最小にする a の値は,

$$a = 1$$

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$		↘	最小	↗	