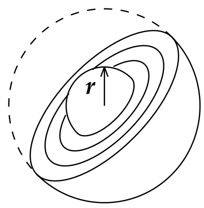
[II–A] 解答例
問１

(a) 点Ｐを錐体の頂点とする２つの錐体によって切り取られる球殻上の２つの微小部分 M_A, M_B の質量 M_A, M_B の比は，２つの錐体が相似で，質量（面）密度が一定であることから，$M_A : M_B = r_A^2 : r_B^2$ である。微小部分 M_A, M_B が質点 m に及ぼす万有引力は反対向きでその大きさの比は，

$$\frac{F_A}{F_B} = \frac{GmM_A/r_A^2}{GmM_B/r_B^2} = \frac{M_A}{M_B}\frac{r_B^2}{r_A^2} = 1 \tag{1}$$

であるから，互いに打ち消しあう。球殻全体は，このようなペアの集合に分割できるので，球殻が質点に及ぼす万有引力は，全てキャンセルする。

(b) 球対称質量分布を球心を中心とする薄い球殻に分割する。質点の外側に位置する各球殻からの万有引力は (a) で示したようにキャンセルする。よって，質点より内側の球体部分からの万有引力のみを考えればよい。



(c) 外側 $r > R$ は，性質（*）より，力の大きさは，

$$F(r) = \frac{GmM}{r^2} \tag{2}$$

そのポテンシャルは，

$$U(r) = U(\infty) + \int_\infty^r dr \frac{GmM}{r^2} = -\frac{GmM}{r} \tag{3}$$

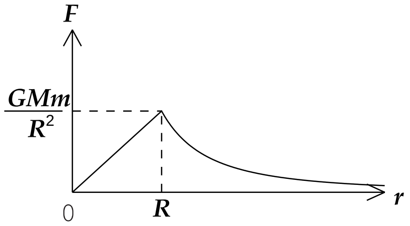
内側 $r < R$ は，性質（*）より，質点より内側にある質量は，$M_0 = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0$ であるから，力の大きさは，

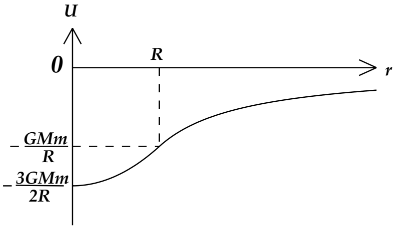
$$F(r) = G\frac{mM_0}{r^2} = Gm\frac{4}{3}\pi\rho_0 r = \frac{GmM}{R^3} r \tag{4}$$

そのポテンシャルは，

$$U(r) = -\frac{Gm}{R} + \int_R^r dr Gm\frac{4}{3}\pi\rho_0 r = Gm\frac{4}{3}\pi\rho_0\frac{1}{2}(r^2 - 3R^2) = \frac{GmM}{2R^3}(r^2 - 3R^2) \tag{5}$$

グラフは，以下の通り。





(d) 半径 r の点で働く力は，

$$F(r) = \frac{GmM(r)}{r^2}, \quad M(r) = \int_0^r da 4\pi a^2 \rho(a) \tag{6}$$

である。これが一定であることから，$F(r) = C$ すなわち

$$\int_0^r da 4\pi a^2 \rho(a) = Kr^2, \quad K = \frac{C}{Gm} \tag{7}$$

両辺を r で微分すると，$4\pi r^2 \rho(r) = 2Kr$，つまり $\rho(r)$ は r^{-1} に比例する。$M(R) = M$ より，比例係数を求めて，

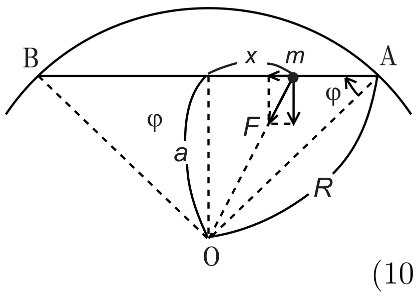
$$\rho(r) = \frac{M}{2\pi R^2 r} \tag{8}$$

問 2

(a) 質点の球心からの距離が $r = (x^2 + a^2)^{1/2}$ であるから，万有引力のトンネルに沿う成分は，

$$\begin{aligned} F_x = F(r)\frac{x}{r} &= -Gm\frac{\frac{4}{3}\pi(x^2+a^2)^{3/2}\rho}{x^2+a^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} \\ &= -Gm\frac{4}{3}\pi\rho x = -\frac{GmM}{R^3}x \end{aligned} \tag{9}$$

ここで，a は球心からトンネルの中心までの距離 $R\sin\varphi$ である。力の向きは，トンネルの中心に向かう向き。



(b) 質点の運動方程式は，(a) より

$$ma = -\frac{GmM}{R^3}x \tag{10}$$

となり，$a = -\omega^2 x$ より，角振動数 $\omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$ の単振動をあらわす。$t = 0$ で $x(0) = R\cos\varphi$, $v(0) = 0$ より，

$$x(t) = R\cos\varphi\cos\left(\sqrt{\frac{GM}{R^3}}t\right) \tag{11}$$

T は周期に等しいので，

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}} \tag{12}$$

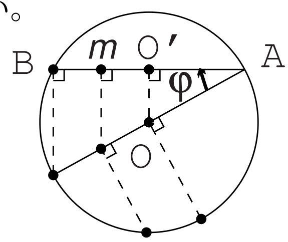
(c) 万有引力が等速円運動の向心力となっているので，等速円運動の角振動数を Ω とすると，

$$\frac{GmM}{R^2} = mR\Omega^2 \tag{13}$$

これより，$\Omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$ となるので，

$$T' = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}} \tag{14}$$

(d) 点 A を端点とし，球心を通る単振動は，等速円運動を直径（球心を通るトンネル）上に射影したものに等しいから，その単振動の周期は (c) の等速円運動の周期と等しい。一方，点 A を端点に持ち球心を通らない任意のトンネル内の単振動は，球心を通る単振動を射影したものと等しいから，この単振動の周期は球心を通る単振動のそれと同じである。このことは，(b) の単振動が，トンネルの角度 φ に依らないことからも分かるが，図に示すと明らかである。以上より，任意の角度のトンネル内の単振動の周期は，等速円運動の周期に等しい。

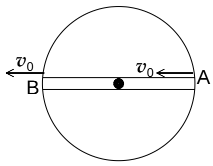


(e) (e-1) エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GmM}{R} = -\frac{GmM}{r} \tag{15}$$

これより

$$r = \frac{R}{1 - \frac{R}{2GM}v_0^2} \tag{16}$$



(e-2) 点 B を通過した後は,（球面上に再び到達するまでは）質点は楕円軌道を描いて運動する。エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GmM}{R} \tag{17}$$

前問 (e-1) と異なり，v が未定なので，これだけでは r は決まらない。一方，面積速度一定（角運動量保存則）より

$$rv = Rv_0 \sin\varphi \tag{18}$$

の関係がある。なぜなら，面積速度は，球心から速度の方向に下ろした垂線の長さと v_0 との積に等しいが，この垂線の長さは，球心からトンネルの中心までの距離 $a = R\sin\varphi$ に等しいから（図を参照）。

これら 2 つの式から，v を消去すると，r の 2 次式

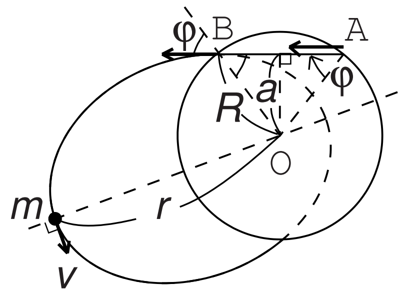
$$\left(\frac{2GM}{R} - v_0^2\right) r^2 - 2GMr + R^2 v_0^2 \sin^2\varphi = 0 \tag{19}$$

になるが，r の最大値を求めるには，解として

$$r = \frac{GM + \sqrt{G^2M^2 + (-2GMRv_0^2 + R^2v_0^4)\sin^2\varphi}}{\frac{2GM}{R} - v_0^2} \tag{20}$$

を採用する。この式は，$\varphi = 0$ のとき，確かに上の結果 (e-1) を再現する。$\varphi \to \pi/2$ のときは,

$$r = \frac{Rv_0^2}{\frac{2GM}{R} - v_0^2} \tag{21}$$



(f) 万有引力は,

$$F(r) = \frac{Gm}{r^2}\left\{\frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{2}R\right)^3 \rho_2 + \frac{4\pi}{3}\left[r^3 - \left(\frac{1}{2}R\right)^3\right]\rho_1\right\} \tag{22}$$

万有引力のトンネルに沿う成分は，$r = (x^2 + a^2)^{1/2}$ より

$$\begin{aligned} F_x = F(r)\frac{x}{r} &= \frac{4\pi}{3}Gm\left\{\rho_2 \frac{1}{8}R^3\frac{x}{r^3} + \rho_1\left(x - \frac{1}{8}R^3\frac{x}{r^3}\right)\right\} \\ &= \frac{4\pi}{3}Gm\left\{\frac{1}{8}R^3(\rho_2 - \rho_1)\frac{x}{(x^2+a^2)^{3/2}} + \rho_1 x\right\} \end{aligned} \tag{23}$$

そのポテンシャルは,

$$U(x) = \int_{x_0}^{x} dx F_x - \frac{GmM}{R} = V(x) - V(x_0) - \frac{GmM}{R}, \tag{24}$$

ここで，$x_0 = R\cos\varphi$，$V(x)$ の定義は,

$$V(x) = \frac{4\pi}{3}Gm\left\{\frac{1}{8}R^3\frac{(\rho_1 - \rho_2)}{(x^2+a^2)^{1/2}} + \frac{1}{2}\rho_1 x^2\right\}, \quad a = R\sin\varphi \tag{25}$$

一方，全質量は,

$$M = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{2}R\right)^3\rho_2 + \frac{4\pi}{3}\left[R^3 - \left(\frac{1}{2}R\right)^3\right]\rho_1 = \frac{4\pi}{3}\frac{\rho_2 + 7\rho_1}{8}R^3 \tag{26}$$

エネルギー保存則

$$E=\frac{1}{2}mv_x^2+U(x)=-\frac{GmM}{R} \tag{27}$$

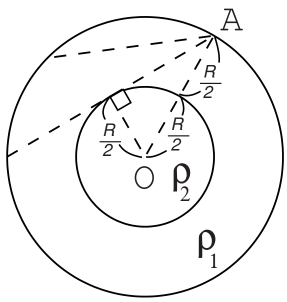
より速度は,

$$v_x=\sqrt{\frac{2}{m}[E-U(x)]}=\sqrt{\frac{2}{m}[V(x_0)-V(x)]} \tag{28}$$

従って，v_x をできるだけ大きくするには，ポテンシャル $U(x)$ あるいは $V(x)$ をできるだけ小さくすればよい。このためには，M を一定に保ちながら，単振動からのずれの部分 $\frac{(\rho_1-\rho_2)}{(x^2+R^2\sin^2\varphi)^{1/2}}$ をできるだけ大きな負の値にすればよい。よって，$\rho_2,\rho_1\geq 0$ の範囲で，$\rho_2+7\rho_1(=c)$ を一定に保ちながら，$\rho_2-\rho_1(=s)$ をできるだけ大きな正の値にすると同時に φ はできるだけ小さな値にすればよい。2 つの直線が交わる範囲を考えれば，$s=c$ の場合にこれが実現する。

以上より，v_x が最も大きくなるのは，トンネルが密度 ρ_2 の球に接する場合で，

$$\varphi=\pi/6,\quad \rho_1\to 0,\quad \rho_2\to\frac{M}{\frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{2}R\right)^3} \tag{29}$$



周期は,

$$T=\int_{t_1}^{t_2}dt=\sqrt{2m}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}} \tag{30}$$

を計算すれば求められる。

質点の速度を最大にするには，質点ができるだけ大きな力を受けられるように，トンネルより内側にできるだけ多くの質量が近い距離に集中するほうがよいと考えられるが，この結果は確かにこの直感的理解と一致する。