略解

[1] 基本的な計算問題

$2x=1+\sqrt{5}$　より $(2x-1)^2=5$　すなわち　$x^2=x+1$　これを利用して

$x^4=(x+1)^2=3x+2=\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}$

$\dfrac{1}{x^4}=\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}$ であるから、$x^4-\dfrac{1}{x^4}=\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}-\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}=3\sqrt{5}$

[2]　三角関数、加法定理、計算

$f(n+1)+f(n)+f(n-1)=A\left(\cos(n+1)\theta+\cos n\theta+\cos(n-1)\theta\right)$
$=A\left(\cos n\theta\cos\theta-\sin n\theta\sin\theta+\cos n\theta+\cos n\theta\cos\theta+\sin n\theta\sin\theta\right)$
$=A\cos n\theta\left(2\cos\theta+1\right)=0$　　これが　n によらず成り立つため

$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$　よって　θは　$\theta=\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3}$　と決まる。　また、

$f(-1)=A\cos(-\theta)=A\left(-\dfrac{1}{2}\right)=1$　より　$A=-2$

[3] 放物線、直線の式、囲まれた面積

$ax^2+bx+c=mx+n$　を整理した2次方程式　$ax^2+(b-m)x+c-n=0$　の2つの解がα，βであるから，方程式は　$a(x-\alpha)(x-\beta)=0$　と表される。

面積は絶対値をとり　$\left|a\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx\right|$　を計算する。

$$=\left|a\left[\frac{1}{3}x^3-\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)x^2+\alpha\beta x\right]_\alpha^\beta\right|=\left|-\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3\right|=\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$$

別解法：

$$=\left|a\frac{1}{2}(x-\alpha)(x-\beta)^2\Big|_\alpha^\beta-a\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta(x-\beta)^2dx\right|=\left|-a\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}(x-\beta)^3\Big|_\alpha^\beta\right|$$

$$=\left|a\frac{1}{6}(\alpha-\beta)^3\right|=\frac{1}{6}|a|(\beta-\alpha)^3$$

[4] ベクトル、内積、三角形の面積

角 ACB を θ とする。ベクトル $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$ を考える。$\overrightarrow{CA} = (2,-1,1), \overrightarrow{CB} = (3,1,0)$

内積は $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = (2,-1,1)\bullet(3,1,0) = 5$　これは $\left|\overrightarrow{CA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CB}\right| \cos(\theta)$ であるから

$\left|\overrightarrow{CA}\right| = \sqrt{2^2+1^2+1^2} = \sqrt{6}$,　$\left|\overrightarrow{CB}\right| = \sqrt{3^2+1^2+0^2} = \sqrt{10}$ より　$\cos(\theta) = \frac{5}{\sqrt{60}}$

$\sin(\theta) = \sqrt{1-\cos^2(\theta)} = \sqrt{\frac{35}{60}}$　より，三角形 ABC の面積は

$$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{CA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CB}\right| \sin(\theta) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{\frac{35}{60}} = \frac{\sqrt{35}}{2}$$

参考：

辺AB＝辺AC＝$\sqrt{6}$,　辺BC＝$\sqrt{10}$の２等辺三角形なので、底辺をBCとし高さを三平方の定理で求め面積を出すことも容易である。また、外積を用いて

$$S = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \frac{1}{2}\left|(1,2,-1) \times (-2,1,-1)\right| = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2}\left|(-2+1, 2+1, 1+4)\right| = \frac{\sqrt{35}}{2}$$

と表すこともできる。

[5]　簡単な確率と漸化式の計算

(1)　(n+1)回目で当たりがでるのは，ｎ回目のとき当たりならくじ A を引いて確率 1/4，はずれなら，くじ B を引いて 1/3 の確率だから

$$P_{n+1} = \frac{1}{4}P_n + \frac{1}{3}(1-P_n) = -\frac{1}{12}P_n + \frac{1}{3}$$

(2)　(1)の漸化式でP_nがある値Pに漸近するものと考えると

$P = -\frac{1}{12}P + \frac{1}{3}$　より $P = \frac{4}{13}$　これを用いて (1) の漸化式は

$P_{n+1} - \frac{4}{13} = -\frac{1}{12}\left(P_n - \frac{4}{13}\right)$　と変形できる。これは等比数列ゆえ初項P_1を用い　$P_n - \frac{4}{13} = \left(-\frac{1}{12}\right)^{n-1}\left(P_1 - \frac{4}{13}\right)$　まとめると　$P_n = \left(-\frac{1}{12}\right)^{n-1}\left(P_1 - \frac{4}{13}\right) + \frac{4}{13}$

参考：

(2) について別の解き方を見てみよう。

$$
\begin{aligned}
P_n &= \frac{1}{3} - \frac{1}{12}P_{n-1} \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{12}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{12}P_{n-2}\right) \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{12}\times\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{12}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{12}P_{n-3}\right) \\
&= \left(\frac{1}{12}\right)^0 \times \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{12}\right)^1 \times \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{12}\right)^2 \times \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{12}\right)^3 \times \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{12}P_{n-4}\right) \\
&\quad \vdots \\
&= \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k\left(\frac{1}{12}\right)^k + (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}P_1
\end{aligned}
$$

ここで、$S = \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k\left(\frac{1}{12}\right)^k$ とおくと、S は初項 1 、公比 $-\frac{1}{12}$ の等比数列の和（項の数に注意）なので、$S = \frac{12}{13} - \frac{12}{13}\times\left(\frac{-1}{12}\right)^{n-1}$ よって

$$
P_n = \left(-\frac{1}{12}\right)^{n-1}\left(P_1 - \frac{4}{13}\right) + \frac{4}{13}
$$