平成 21 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述

実施時間［9:00－17:00］

課題 II-A, II-B

（ 10:00－15:30 ）

注意事項

課題Ⅱには、[Ⅱ－A]、[Ⅱ－B]、[Ⅱ－C]、[Ⅱ－D]の４題があります。
志望するコースによって、次に示す問題を解答してください。

・物理学コース、フロンティアテクノロジーコース：
　[Ⅱ－A]、[Ⅱ－B]の両方を解答してください。

・人間探求コース：
　[Ⅱ－A]、[Ⅱ－B]、[Ⅱ－C]、[Ⅱ－D]の中から２題を選択して解答してください。

[II–A]

ニュートンの万有引力の法則によれば，質量 M と質量 m を持つ２つの質点（大きさの無視できる物体）には，質量の積 Mm に比例し質点間の距離 r の２乗に反比例する大きさの引力が両質点を結ぶ直線に沿う方向に働く。以後，質量 M を持つ質点を質点M，質量 m を持つ質点を質点mと呼ぶことにする。いま，質点Mに対する質点mの位置ベクトルを $\vec{r}$ とすると，質点Mが質点mにおよぼす万有引力は，ベクトルで書くと，

$$\vec{F} = -F(r)\frac{\vec{r}}{r}, \quad F(r) = |\vec{F}| = G\frac{Mm}{r^2}$$

で与えられる。ここで，G は物体によらない定数で重力定数と呼ばれる。多数の質点がある場合には，それぞれの質点からの万有引力のベクトルの和として合力を計算すればよい。また，大きさが無視できない物体や，質量が連続的に分布している場合でも，それらを微小な質量部分に分割し，それぞれからの万有引力の寄与を足し合わせればよい。

万有引力に対しては，
性質 $\star$「球対称な質量分布が，その外部にある点Pにおよぼす力は，全質量が球心に集中した場合に等しい。」
を示すことができるが，証明なしにこれを認めることにする。ここで，球対称な質量分布とは，質量密度が，ある点からの距離のみに依存する場合で，その点が球対称の中心（球心）である。

観測によれば，太陽を回る惑星は，次のケプラーの法則に従う。

第一法則　惑星は太陽を１つの焦点とするだ円軌道を描く。

第二法則　惑星と太陽とを結ぶ線分が一定時間に通過する面積は一定である。

第三法則　惑星の公転周期の２乗は，だ円軌道の長半径の３乗に比例する。

ニュートンは，太陽が惑星に万有引力を及ぼすとしてケプラーの法則を説明することに成功した。

以下，半径 R の球面内に球対称な質量分布があり，その全質量が M である場合（簡単のため球体Mと呼ぶことにする）を考える。球対称な質量分布では，球心から測った距離を r としたとき，質量密度 ρ は一般には r の関数 $\rho(r)$ であって，必ずしも一定とは限らないことに注意しなさい。

問１

質点mが球体Mの内部にいる場合 $(r < R)$ には，質点mが受ける万有引力は，球体M内の質量分布によって異なることを確かめよう。

(a) 球体 M が球殻（厚さの無視できる球面）である場合には，その内部にいる質点 m には万有引力は働かない，つまり，$\vec{F} = \vec{0}$ となる。このことを，図 1 に示すような，質点 m のある点 P を錐体の頂点とする 2 つの錐体によって切り取られる球殻上の 2 つの微小部分 $\mathrm{M_A}$, $\mathrm{M_B}$ を考察することで示しなさい。

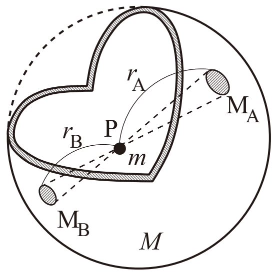

図 1

(b) 前問 (a) の結果を用いて，球体 M の内部にいる質点 m に働く万有引力を求めるには，それより内側にある質量分布からの万有引力のみを考えればよいことを説明しなさい。

(c) 質量密度が一定のとき，性質 ⋆ を用いて，質点 m に働く万有引力の大きさ $F(r)$ を求めなさい。それから万有引力の位置エネルギー $U(r)$ を求めなさい。また，その結果を用いて，$F(r)$ と $U(r)$ のグラフを，$r < R$ と $r \geq R$ の違いがわかるように描きなさい。ただし，$r = \infty$ では $U = 0$ とする。

(d) 質量密度 ρ が r の関数 $\rho(r)$ であるとき，半径 r の球体の質量 $M(r)$ は $M(r) = \int_0^r 4\pi a^2 \rho(a) da$ で与えられる。これを用いて，球体 M の内部の（原点 $r = 0$ を除く）すべての点で万有引力の大きさ $F(r)$ が一定になるような質量密度 ρ を r の関数として求めなさい。ただし，$F(r) = 0$ の場合を除く。

問 2

図 2 のように，半径 R の球体表面上のある点 A から球体内部に向かってまっすぐに細いトンネルを掘り進め，球体を突き抜けた点を B とする。このトンネルを通過する質点 m の運動を考えよう。トンネルの向きは，点 A での鉛直下向きから測った角度 φ $(0 \leq \varphi < \pi/2)$ で指定する。球体 M の質量密度が一定の場合，トンネルが球の中心を通るとき（$\varphi = 0$）には，質点はトンネル内では単振動をすることが知られている。以下では，トンネルの空洞部分の重力への影響や質点とトンネルとの摩擦や空気抵抗は無視してよい。

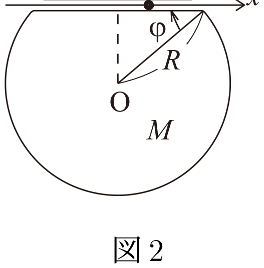

図 2

(a) 球体 M の質量密度が一定で，角度 φ が（$\varphi = 0$ とは限らない）一般の場合に，質点 m に働く万有引力のトンネルに沿った方向の大きさと向きを答えなさい。ただし，トンネル内の質点 m の位置は，図 2 のように，トンネルの中心を原点とする座標 x で記述する。

(b) 前問 (a) のとき，時刻 $t = 0$ で質点 m を点 A からトンネル内に静かに落下させる。任意の時間 t $(t > 0)$ での質点 m の x 座標 $x(t)$ を求めなさい。また，質点が初期位置 A に最初に戻ってくるまでの時間 T を求めなさい。

(c) 今度は，質点 m を点 A から人工衛星のように球面すれすれに等速円運動させた。このとき，点 A に最初に戻ってくるのに要する時間 T' を求めなさい。

(d) (c) で求めた T' は (b) で求めた T に等しくなる。この理由を（式を用いずに）文章と図を用いて説明しなさい。

(e) 球体 M の質量密度が一定の場合に，点 A から初速 v_0 で角度 φ のトンネルに入射した質点 m がトンネルを通過して点 B から飛び出した。それ以後の運動を考えよう。ただし，$\sqrt{\frac{GM}{R}} \leq v_0 < \sqrt{\frac{2GM}{R}}$ の範囲で考える。

(e-1) $\varphi = 0$ の場合に, 質点が球心から最も離れたときの球心からの距離を求めなさい。

(e-2) φ が一般の場合に, 質点が球心から最も離れたときの球心からの距離を求めなさい。特別な場合として，$\varphi = 0$ と $\varphi \to \pi/2$ の結果が正しく再現されているか確かめなさい。

(f) 球体内部の質量密度が一様でない場合として，質量密度 ρ が，$\frac{1}{2}R < r \leq R$ では ρ_1，$0 \leq r \leq \frac{1}{2}R$ では ρ_2 で与えられる場合を考える。ここで，ρ_1, ρ_2 は負でない定数である。トンネルは，常に密度 ρ_1 の領域内（$\pi/6 \leq \varphi < \pi/2$）にあるようにまっすぐに掘るとする。このとき，質点 m の位置 x での速度 v_x を求めなさい。この結果を用いて，点 A から出発して点 A に戻ってくるのに要する時間 T をなるべく小さくするには ρ_1, ρ_2 および φ の値をどう選べばよいか答えなさい。ただし，球体の全質量 M は常に一定に保つとする。

[**II–B**]

光や電波は，互いに垂直な電場と磁場が空間を伝わる電磁波として理解できる。教科書に書かれている電磁気の知識により，光や電波の性質を説明できることを確かめてみよう。電磁波のエネルギーは，電場のエネルギーと磁場のエネルギーの和として表すことができる。電場や磁場のエネルギーは大学の物理で学ぶ新しい考え方である。

問１

次の設問に沿って，電場や磁場のエネルギーはどのようにして見積もることができるか考えなさい。

(a) 極板面積が S で，極板間距離が d の平行板コンデンサーに電荷 Q が蓄えられている。このときコンデンサーに蓄えられたエネルギー U と電極間の電場 E を求めなさい。ただし極板の間は狭く $(d \ll \sqrt{S})$ 真空で，その誘電率は ε_0 とする。

(b) コンデンサーに蓄えられたエネルギーは，極板の間に挟まれた電場の強い領域の体積 $V = Sd$ に比例し，かつ電場 E の 2 乗に比例することを示しなさい。

(c) (b) の結果は，コンデンサーのエネルギーは電場の強い領域に蓄えられていると考えても矛盾がないことを示している。この考えにそって，電場が E である領域に蓄えられる単位体積あたりのエネルギーを見積りなさい。

(d) 半径が a で全長が ℓ， 全巻数が N のソレノイドコイルが真空中におかれている。このコイルに電流 I が定常的に流れているとき，コイルの中心の磁束密度 B とコイルに蓄えられているエネルギー U を求めなさい。ただし $a \ll \ell$ で，真空の透磁率は μ_0 とする。

(e) コンデンサーのときの考えを応用し，磁束密度が B である領域に蓄えられる単位体積当たりのエネルギーを見積りなさい。

問２

電磁波の進行に伴って，電場も磁場も変動する。磁場が変化すると起電力が生じるので，電場が生まれる。逆に電場が変化すると，あたかもそこに電流が流れたのと同じように磁場が生まれる。これらの二つの作用を次の設問に従って考えなさい。

(a) 図 1 に示すように幅が a で無限に長い領域を一様につらぬいている磁場が，Δt の時間に ΔB だけ増加した。このとき，図 1 に示すような幅が a で長さが ℓ の長方形の導線をおいた場合に発生する誘導起電力の大きさと向きを求めなさい。さらに誘導起電力の大きさから，長方形の内部や周囲にどのよう

な電場が発生するか考えなさい。ただし，短い区間 $\Delta\vec{\ell}$ にかかる起電力は，電場との内積 $(= \vec{E}\cdot\Delta\vec{\ell})$ で表せることを証明せずに使ってよい。

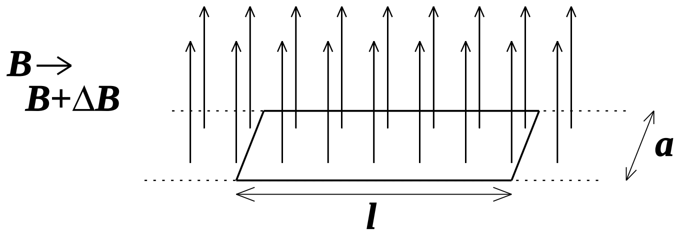

図 1

(b) 図 2 に表すように z 方向に伝わる電磁波を考えよう。ここでは簡単のため，電場は x 成分だけ，磁場は y 成分だけをもつとする。また電場と磁場の強さは時刻 t と位置 z だけによるとする。磁場が図 3 に示すような波形を保ったまま，速度 v で z 方向に伝わるとき，(a) での考察をもとに 電場の強さを求めなさい。計算では

$$B_y(z,\ t) \ = \begin{cases} 0 & z \le vt - 2a \\ B_0\,\dfrac{z - vt + 2a}{a} & vt - 2a < z < vt - a \\ -B_0\,\dfrac{z - vt}{a} & vt - a \le z \le vt + a \\ B_0\,\dfrac{z - vt - 2a}{a} & vt + a < z < vt + 2a \\ 0 & z \ge vt + 2a \end{cases} \qquad (1)$$

と考えなさい。

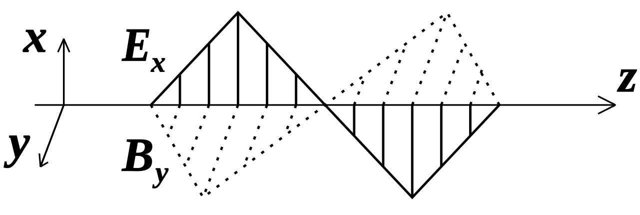

図 2

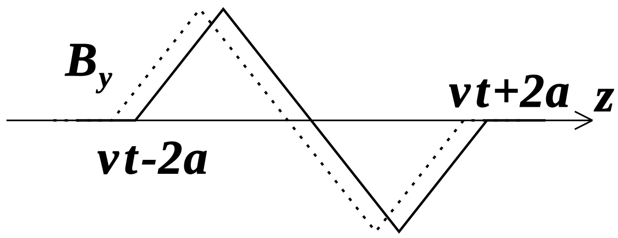

図 3

(c) 図 4 のように断面積が一定の導線が切断されている。上半分と下半分に同じ電流 I を流しても，切断面に電荷がたまるだけで電流は流れない。しかし導線の周囲には，切断された区間にも電流 I が流れているのと同様の磁場ができる。コンデンサーの場合を参考にしながら，切断面の間に発生する電場の時間変化を求めなさい。またこのことを利用し，Δt の短い時間に電場が ΔE だけ増えた場合にできる磁場と同じ磁場をつくるには，単位面積あたりどれだけの電流を流せばよいか考えなさい。電流の値だけでなく，流す方向についても答えなさい。

(d) (b) で求めたように電場が変化すると，それにより磁場が発生するはずである。発生する磁場の大きさを求めなさい。電場の時間変化から求めた磁場が，(b) で仮定した磁場と一致するための条件を数式で表しなさい。またその数式が意味することを論じなさい。

(e) (d) での条件が満たされたとき，電場のエネルギーと磁場のエネルギーの比はどうなるか求めなさい。

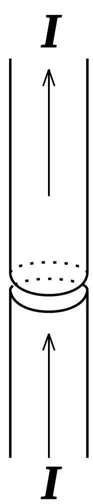

図 4