平成 22 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題 II-A　解答例

II-A 解答

本問題は，平面上の一点からひもでつなぎとめられた大きさの無視できる小球がどのように運動するかを問うています。平面上に小球以外何もなければ非常に簡単で，小球は等速円運動をします (問 1)。しかし，平面上に太さが無視できる針 (問 2) や半径 r の円筒 (問 3) があると小球の運動は複雑になってきます。このような運動をイメージし，うまく物理や数学の道具を使って議論できるかを問う問題です。

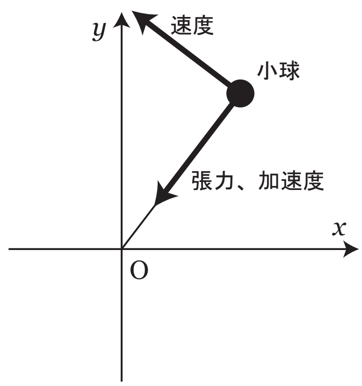
問 1，問 2 は，標準的な円運動の問題で，受験生の基礎学力を試しています。問 2(c) で，ひもの張力がどこでも等しいことを考えなければならないので物理的なイメージをきちんと持てているかが問われます。

問 3 は，円筒状の物体があるときに，小球をつなぎとめているひもが円筒状の物体に絡まりながらどのように運動するかを求める問題です。運動のイメージを持つことに加えて，微分や積分といった数学の道具をうまく使いこなせているかが問われます。円筒にひもが徐々に絡まっていくのですが，円筒表面にひもが巻きつき始める点を $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ とおくことでこの運動は理解しやすくなります。物理的なポイントとしては，速度の絶対値が常に一定になるところです。このことを証明するには，ひもが小球に仕事をしない，すなわち，ひもの張力と小球の速度の向きが直角になっていることを示す必要があります。そうすれば力学的エネルギーが保存され，速度の絶対値が変わらないことを証明できます。このことに気づいた受験生は良い物理のセンスを持っていると言えるでしょう。軌跡の概形は，糸を鉛筆やコップなどにまきつけ，その先にペンをつなぐと簡単に描けます。どのように運動するのかをきちんとイメージしながら問題を解いてきたかが問われます。

ちなみにこの曲線は，円の伸開線（Involute）です。歯車の歯の形をこの曲線にすると，歯車の歯同士のかみ合わせが最適であることが知られており，工学的にも応用されています。なお，中心の円から離れると（この場合だとひもが非常に長いと），アルキメデスのらせんに近づくことも知られています。

問 1 基本的な等速円運動の問題です。速度，加速度や張力の概念，等速円運動での向心力をきちんと求められるかが問われます。

(a) 図のようになる。等速円運動では，速度と加速度が直交することが重要。小球には張力以外の力はかかっていないので，張力の向きと加速度の向きは一致する。



(b) 半径が ℓ の等速円運動であり，張力が向心力となっているので，小球の加速度の大きさは $a = \dfrac{v_0^2}{\ell}$，ひもの張力の大きさは $F = \dfrac{mv_0^2}{\ell}$ となる。

(c) ひもの張力の向きと小球の速度の向きが直交しているので，仕事は 0 である。

問 2 小球がひもに結ばれて等速円運動している時に，ひもの長さが突然半分になったときに小球の運動がどうなるかを問います。ひもは仕事をしないので，小球の運動エネルギーは一定，すなわち速さが一定であることを理解できるかがポイントです。

(a) 半径 $\ell/2$ の等速円運動であるので，小球の速さは $v = v_0$，加速度の大きさは $a = \dfrac{2v_0^2}{\ell}$，張力の大きさは $F = \dfrac{2mv_0^2}{\ell}$ となる。

(b) ひもが針に絡まる時刻は $t = \dfrac{\pi\ell}{2v_0}$ である。それまでは，中心が原点の半径 ℓ の等速円運動であり，そのあとは，中心が点 $(0, \ell/2)$ で半径 $\ell/2$ の等速円運動である。よって，幾何学的な考察によって $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi\ell}{2v_0}$ のとき

$$\begin{aligned} x(t) &= \ell \cos \frac{v_0 t}{\ell} \\ y(t) &= \ell \sin \frac{v_0 t}{\ell} \end{aligned}$$

$t \geqq \dfrac{\pi\ell}{2v_0}$ のとき

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{\ell}{2} \sin \left[\frac{2v_0}{\ell} \left(t - \frac{\pi\ell}{2v_0} \right) \right] \\ &= -\frac{\ell}{2} \sin \left(\frac{2v_0 t}{\ell} - \pi \right) = \frac{\ell}{2} \sin \frac{2v_0 t}{\ell} \\ y(t) &= \frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{2} \cos \left[\frac{2v_0}{\ell} \left(t - \frac{\pi\ell}{2v_0} \right) \right] \\ &= \frac{\ell}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{2v_0 t}{\ell} - \pi \right) \right] = \frac{\ell}{2} \left(1 - \cos \frac{2v_0 t}{\ell} \right) \end{aligned}$$

となる。

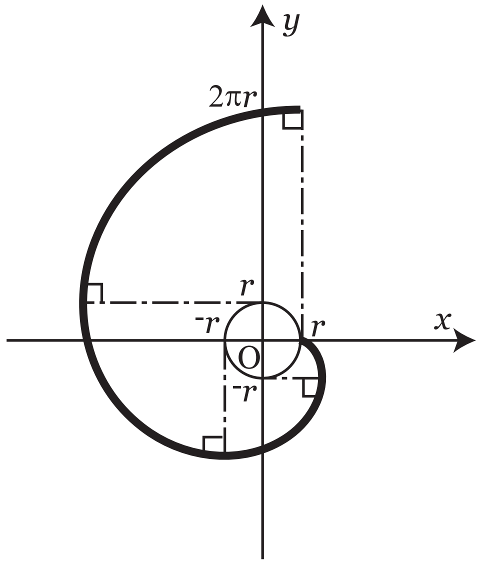
(c) ひもの方向と力の方向が一致することを考慮する。小球の位置を M，針の位置を N とおくと，針には ON 間のひもと NM 間のひもの双方から力を受ける。ひもと針の間に摩擦がないので，ひもの張力はどの部分でも (つまり ON 間も NM 間でも) 等しくなる。張力の大きさは **(a)** で $F = \dfrac{2mv_0^2}{\ell}$ と求まっているので，これらを向きを考えて足し合わせればよい。ON 間のひもから受ける力は常に一定で $(0, -\dfrac{2mv_0^2}{\ell})$，一方，NM 間のひもから受ける力は時刻 t の関数として $(\frac{2mv_0^2}{\ell} \sin \frac{2v_0 t}{\ell}, -\frac{2mv_0^2}{\ell} \cos \frac{2v_0 t}{\ell})$ となる。針にかかる力はこの二つの力の和であるので

$$\begin{aligned} F_x(t) &= \frac{2mv_0^2}{\ell} \sin \frac{2v_0 t}{\ell} \\ F_y(t) &= -\frac{2mv_0^2}{\ell} - \frac{2mv_0^2}{\ell} \cos \frac{2v_0 t}{\ell} \end{aligned}$$

が得られる。

問 3 小球につながれたひもが円筒に巻き付くときの運動を考える問題です。点 Q を考えることで問題は易しくなります。ひもの向き，速度の向きなどをうまく数学を利用して導けるかが問われます。問 2 同様に小球は仕事をされないので，運動エネルギーが一定，すなわち速さが一定ということがわかれば，かなり見通しが立ちやすくなると思われます。

(a) 図に示す。ちょうど 1 周したところで小球は円筒と衝突する。つまり，軌跡は点 $(r, 0)$ で円筒表面と交わる。また，ひもの向きと軌跡の接線の向きは直交することに注意して，軌跡を描くと図のようになる。実際には，衝突する点でも軌跡の向きと円筒の表面とは直交する。



(b) 弧 PQ の長さが $r\theta$ と表わされ，ひも全体の長さ ℓ から引けばよいので，$\ell' = \ell - r\theta$ となる。

(c) 小球の位置を M とすると，線分 QM と x 軸がなす角は $\theta + \dfrac{\pi}{2}$ と書けるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{QM}} = \left(\ell' \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right), \ell' \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right) = (-\ell' \sin\theta, \ell' \cos\theta)$$

点 Q の座標は $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ と表わされるので，ベクトルを用いて，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{QM}} &= (r\cos\theta, r\sin\theta) + (-\ell' \sin\theta, \ell' \cos\theta) \\ &= (r\cos\theta - (\ell - r\theta)\sin\theta, r\sin\theta + (\ell - r\theta)\cos\theta)\end{aligned}$$

となる。これより

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta - (\ell - r\theta)\sin\theta \\ y &= r\sin\theta + (\ell - r\theta)\cos\theta \end{aligned}$$

が得られる。

(d) (c) の結果を用いて計算するが，$\sin(\theta + \Delta\theta)$，$\cos(\theta + \Delta\theta)$ の計算が何度も出てくるので先に計算しておく。

$$\begin{aligned}\sin(\theta + \Delta\theta) &= \sin\theta\cos\Delta\theta + \cos\theta\sin\Delta\theta \fallingdotseq \sin\theta + \Delta\theta\cos\theta \\ \cos(\theta + \Delta\theta) &= \cos\theta\cos\Delta\theta - \sin\theta\sin\Delta\theta \fallingdotseq \cos\theta - \Delta\theta\sin\theta\end{aligned}$$

これを用いて計算すると

$$\begin{aligned}
\Delta x &= [r\cos(\theta+\Delta\theta)-(\ell-r(\theta+\Delta\theta))\sin(\theta+\Delta\theta)]-[r\cos\theta-(\ell-r\theta)\sin\theta] \\
&\fallingdotseq r(\cos\theta-\Delta\theta\sin\theta)-(\ell-r(\theta+\Delta\theta))(\sin\theta+\Delta\theta\cos\theta) \\
&\quad -r\cos\theta+(\ell-r\theta)\sin\theta \\
&= -r\Delta\theta\sin\theta+r\Delta\theta(\sin\theta+\Delta\theta\cos\theta)-(\ell-r\theta)\Delta\theta\cos\theta \\
&\fallingdotseq -\Delta\theta(\ell-r\theta)\cos\theta \\
\Delta y &= [r\sin(\theta+\Delta\theta)+(\ell-r(\theta+\Delta\theta))\cos(\theta+\Delta\theta)]-[r\sin\theta+(\ell-r\theta)\cos\theta] \\
&\fallingdotseq r(\sin\theta+\Delta\theta\cos\theta)+(\ell-r(\theta+\Delta\theta))(\cos\theta-\Delta\theta\sin\theta) \\
&\quad -r\sin\theta-(\ell-r\theta)\cos\theta \\
&= r\Delta\theta\cos\theta-r\Delta\theta(\cos\theta-\Delta\theta\sin\theta)-(\ell-r\theta)\Delta\theta\sin\theta \\
&\fallingdotseq -\Delta\theta(\ell-r\theta)\sin\theta
\end{aligned}$$

これを用いると変位は

$$\Delta s=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\Delta\theta(\ell-r\theta)\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\Delta\theta(\ell-r\theta)$$

と計算できる。

(e) **(d)** での計算より変位は $(-\Delta\theta(\ell-r\theta)\cos\theta,-\Delta\theta(\ell-r\theta)\sin\theta)$ であった。一方で，ひもの張力の向きはひもの向きと等しいので，$(-\sin\theta,\cos\theta)$ の向きを向いている。

$$(-\Delta\theta(\ell-r\theta)\cos\theta,-\Delta\theta(\ell-r\theta)\sin\theta)\cdot(-\sin\theta,\cos\theta)=0$$

より，張力の向きと変位の向きは常に直交する。よって，小球がされる仕事は常に 0 である。

(f) **(e)** より，小球は仕事をされることがないので，運動エネルギーが変化しない。つまり，速さは常に一定で v_0 である。

(g) **(d)** で求めた変位の大きさ Δs を足し合わせていけば，軌跡が求まるはずである。初期には $\theta=0$ である。小球が円筒と衝突するときには，$\ell=r\theta$ が成り立つので，$\theta=\ell/r$ である。$\Delta s=(\ell-r\theta)\Delta\theta$ であるので，軌跡の長さは

$$\begin{aligned}
s &= \int_0^{\ell/r}(\ell-r\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \left[\ell\theta-\frac{r}{2}\theta^2\right]_0^{\ell/r} \\
&= \frac{\ell^2}{r}-\frac{\ell^2}{2r} \\
&= \frac{\ell^2}{2r}
\end{aligned}$$

となる。常に速さは v_0 で一定であることから，衝突する時刻 t_1 は

$$t_1=\frac{1}{v_0}\frac{\ell^2}{2r}=\frac{\ell^2}{2rv_0}$$

と求められる。

あるいは，曲線の長さの公式を (b) の表現に適用すると，

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{\ell/r} \left\{ \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 \right\}^{1/2} \mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\ell/r} (\ell - r\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\ell^2}{2r} \end{aligned}$$

としてもよい。

(h) **(d)** では，時刻 Δt の間に $\Delta\theta$ だけ変化するとするときに小球が移動する距離 Δs を求めた。小球の速度は常に v_0 で一定なので，$\Delta s = v_0 \Delta t$。**(d)** で求めた式を利用すると，θ の変化速度は

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{v_0\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{v_0\Delta\theta}{(\ell - r\theta)\Delta\theta} = \frac{v_0}{\ell - r\theta}$$

とできる。

$$\begin{aligned} v_x &= -v_0 \cos\theta \\ v_y &= -v_0 \sin\theta \end{aligned}$$

であり，加速度は速度を時間で微分することにより得られるので

$$\begin{aligned} a_x &= -v_0 \sin\theta \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\frac{v_0^2}{\ell - r\theta} \sin\theta \\ a_y &= -v_0 \cos\theta \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\frac{v_0^2}{\ell - r\theta} \cos\theta \end{aligned}$$

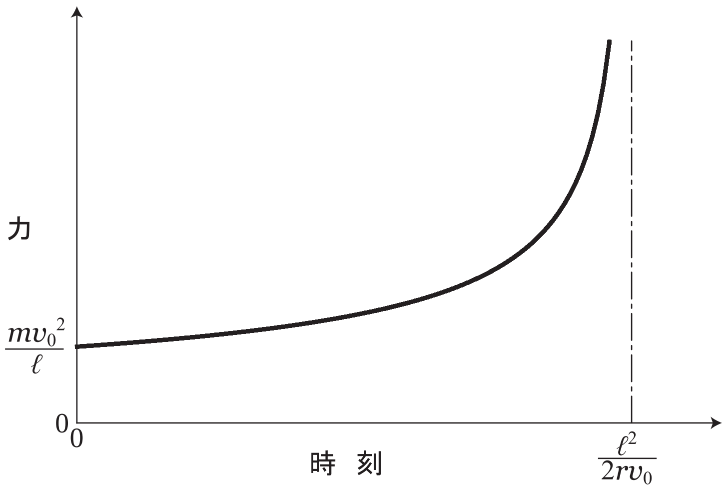
となる。よって加速度の大きさは

$$a = \frac{v_0^2}{\ell - r\theta}$$

となる。$ma = F$ の関係を用いると，

$$F = \frac{mv_0^2}{\ell - r\theta}$$

θ は時間とともに大きくなり，小球が円筒に衝突するときには ℓ/r となる。よって，$\ell - r\theta$ は正で時間とともに小さくなることがわかる。分母が時間とともに小さくなるので，力 F は時間とともに大きくなる。（衝突時には無限大になる。）実際にグラフに描くと図のようになる。



あるいは，小球にかかる力は，小球の運動が瞬間的には半径 $\ell' = \ell - r\theta$，速さ v_0 の等速円運動であると見なせるので，

$$F = \frac{mv_0^2}{\ell'} = \frac{mv_0^2}{\ell - r\theta}$$

としてもよい。

実際の θ や力の時間変化の関数を求めることもできる。時刻 Δt の間に θ は $\frac{\Delta s}{v_0} = \frac{\ell - r\theta}{v_0}\Delta\theta$ だけ変化する。時刻を $t = 0$ から $t = t'$ まで変化させたときに θ が $\theta = 0$ から $\theta = \alpha$ まで変化したとすると，

$$\int_0^{t'} \mathrm{d}t = \int_0^{\alpha} \frac{\ell - r\theta}{v_0}\mathrm{d}\theta$$

が成り立つ。両辺を計算すると

$$t' = \frac{\ell\alpha}{v_0} - \frac{r\alpha^2}{2v_0}$$

2 次方程式を解くと

$$\alpha = \frac{\ell \pm \sqrt{\ell^2 - 2rv_0t'}}{r}$$

ただし，$t' = 0$ のとき $\alpha = 0$ でないといけないのでマイナスの符号をとる。t' は $0 \leqq t \leqq t_1$ のどんな値でもよく，その時の $\angle\mathrm{POQ}$ が α であるので，改めて t' を t と，α を θ とおきなおすと

$$\theta = \frac{\ell - \sqrt{\ell^2 - 2rv_0t}}{r}$$

この関数を力の式に代入すると

$$F = \frac{mv_0^2}{\sqrt{\ell^2 - 2rv_0t}}$$

となる。この関数を用いて描いたのが図のグラフである。