平成 22 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述

実施時間［9:00－17:00］

課題 II-A, II-B

（ 10:00－15:30 ）

注意事項

課題Ⅱには、[Ⅱ－A]、[Ⅱ－B]、[Ⅱ－C]、[Ⅱ－D]の４題があります。
志望するコースによって、次に示す問題を解答してください。

・物理学コース、フロンティアテクノロジーコース：
　[Ⅱ－A]、[Ⅱ－B]の両方を解答してください。

・人間探求コース：
　[Ⅱ－A]、[Ⅱ－B]、[Ⅱ－C]、[Ⅱ－D]の中から２題を選択して解答してください。

[II-A]

長さ ℓ のひもにつながれた質量 m の小球がなめらかな水平面上を運動している。小球の大きさ，ひもの質量，太さ，伸び縮み，摩擦，空気抵抗は無視できるとして以下の問いに答えなさい。ここでは，水平面上に xy 座標を考えることとする。

問 1 図 1 のように，水平面上の原点 O とひもでつながれている小球が，速さ v_0 で反時計まわりに等速円運動をしている。

(a) 小球の速度，加速度，ひもから受ける張力の向きを図示しなさい。

(b) 小球の加速度の大きさ，ひもにかかる張力の大きさを求めなさい。

(c) ひもの張力により小球がされる仕事を求めなさい。

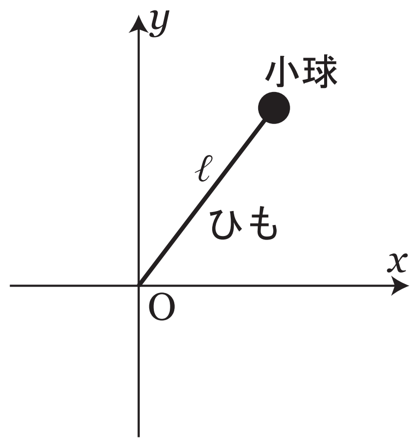

図 1

問 2 問 1 と同様，小球と水平面上の原点 O がひもでつながれている。時刻 $t = 0$ に小球は点 $(\ell, 0)$ にあり，y 軸の正の方向に速さ v_0 で運動を開始した。図 2 のように点 $(0, \ell/2)$ に太さの無視できる針が刺されており，ひもが針に引っかかってからは，小球は針を中心とした等速円運動をした。ただし，ひもと針との間の摩擦は無視できるとする。

(a) 針を中心として等速円運動しているときの，小球の速さ，加速度の大きさ，ひもにかかる張力の大きさを求めなさい。

(b) 時刻 $t = 0$ 以降の小球の位置の x 座標と y 座標をそれぞれ時刻 t の関数として求めなさい。

(c) ひもが針に引っ掛かってからの，ひもが針におよぼす力の x 成分 F_x と y 成分 F_y をそれぞれ時刻 t の関数として求めなさい。

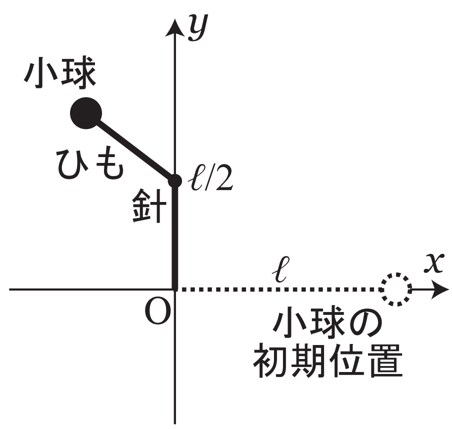

図 2

問 3 図 3 のように，半径 r の円筒を，その中心が原点 O と一致するように水平面上に固定した。円筒上の一点 $\mathrm{P}(r, 0)$ と小球が長さ ℓ のひもで結ばれている。時刻 $t = 0$ に小球は点 (r, ℓ) にあり，x 軸の負の方向に速さ v_0 で運動を開始した。以下では，小球が円筒にはじめて衝突するまでの運動を考える。

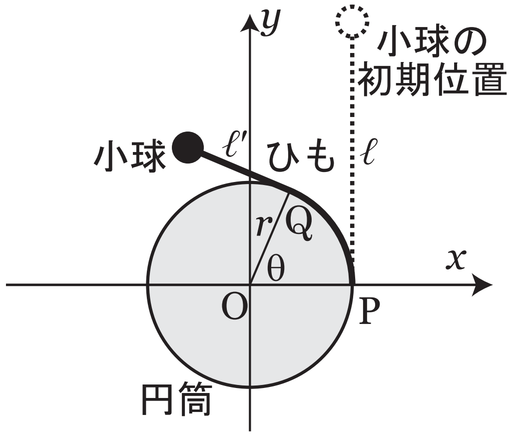

図 3

(a) $\ell = 2\pi r$ とするとき，$t = 0$ から小球が円筒と衝突するまでに小球が描く軌跡の概形を図示しなさい。

以下では，ひもの長さを $\ell = 2\pi r$ と限定せずに考えなさい。

(b) 図 3 のようにひもが円筒の表面に巻きつき始める点を Q とし，$\angle\mathrm{POQ}$ を θ [rad] とする。小球から点 Q までの距離 ℓ' を θ の関数として求めなさい。

(c) 小球の位置の x 座標と y 座標を **(b)** の結果を参考にして，それぞれ θ の関数として求めなさい。ひもは線分 OQ と直交することに注意すること。

(d) $\angle\mathrm{POQ}$ が θ から $\theta + \Delta\theta$ まで変化したとき，小球は点 (x, y) から点 $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ まで移動した。このときの Δx，Δy を求めなさい。またこれを利用して，小球の微小な移動距離 $\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ を求めなさい。ただし，$\Delta\theta$ は微小であるため，$\sin\Delta\theta \fallingdotseq \Delta\theta$，$\cos\Delta\theta \fallingdotseq 1$ と近似し，計算結果に現れる $(\Delta\theta)^2$ の項も無視すること。

(e) $\angle\mathrm{POQ}$ が θ から $\theta + \Delta\theta$ まで変化する間に，ひもの張力により小球がされる仕事を求めなさい。

(f) 小球の速さを時刻 t の関数として求めなさい。

(g) 時刻 $t = t_1$ に小球は円筒に衝突した。時刻 $t = 0$ から $t = t_1$ までの間に小球が描く軌跡の長さと t_1 を求めなさい。

(h) ひもが円筒に及ぼす力の大きさを θ の関数として求めなさい。また，その力の大きさの時間変化の概形をグラフに示しなさい。

[II−B]

「走査型プローブ顕微鏡」の一種の「電気力顕微鏡」では，尖った金属探針を弱いばねで支え，その先端を固体表面すれすれに近づけて振動させる。このときの振動の変化で，固体表面の凹凸形状と電位や電荷などの分布を，場合によっては原子スケールの分解能で見ることができる。そのしくみのうち，電位測定の基本原理の一部は高校の物理の範囲で理解できるので，ここで順を追って考えてみよう。

なお，以下の仮想実験は真空中で行うこととし，真空の誘電率をε_0 [F/m]とする。用いる電池は，内部抵抗が十分小さい電池である。また，ここで考えている全ての力は極板などにはたらく重力より十分大きいため，この問題では重力の影響は無視してよい。

図１のように，同じ形で面積S [m²]の２枚の金属板による平行平板コンデンサーを考える。以後，図での位置によって，これらの金属板を「下側の極板」および「上側の極板」とよぶ。上側の極板の位置を表す変数x [m]は，$x = 0$で下側の極板に接し，正に増加すると下側の極板から遠ざかるようにとる。この平行平板コンデンサーについて，以下の問いに答えなさい。

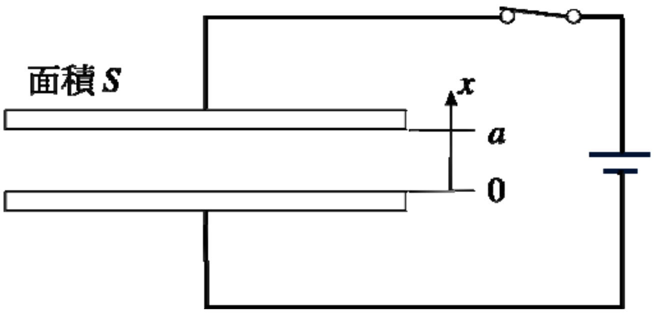

図１

問１　$x = a$のときの電気容量C [F]をε_0，Sおよびaを用いて表しなさい。また，電池を図１の向きに接続し，コンデンサーに電圧V [V]を加えたときに，極板に蓄えられる電荷の大きさQ [C]を求めなさい。この問題では極板のサイズと比較して間隔が十分小さい場合を想定しているため，極板端部の電気容量への影響は無視してよい。

問２　極板に蓄えられる電荷の分布を，必要に応じて「⊕」および「⊖」の記号を用いて模式的に表し，さらに極板周辺に現れる電気力線を描きなさい。ただし，この問いでは，問１で無視した極板端部の影響もわかりやすく描きなさい。

コンデンサーに電圧Vを加え，電荷Qが蓄えられた後に，図１のスイッチを開いて電池をコンデンサーから切り離した。この後，蓄えられた電荷Qは一定となる。この電荷によってコンデンサーに蓄えられている静電エネルギーU [J]は，一般に

$$U = \frac{1}{2}QV$$

と表される。この式は，Q，C，Vの関係から，この３変数のうちの任意の２つで書き直すことができることに注意してほしい。

このコンデンサーの静電エネルギーUは，上側の極板の位置xによって変化する。この変化から，コンデンサーの２極板間にはたらく力を求めよう。

問３　Qが一定に保たれていることに注意して，Uをxの関数としてC，Vを用いずに表しなさい。また，上側の極板位置をaから$a+\Delta a$に移動させたときの静電エネルギー変化分ΔUを求めなさい。

問４　外部からの力Fによって上側の極板をΔa移動させる仕事$F \cdot \Delta a$と，静電エネルギー変化分ΔUは，$F \cdot \Delta a = \Delta U$を満たす。この関係から，電荷によって極板にはたらく静電気力$F_Q = -F$を求めなさい。

次に，図１のスイッチが閉じられており，電池が接続された状態で２極板間にはたらく静電気力を考えよう。この場合は，電池の持つエネルギーの増減と内部抵抗によるエネルギー損失を考える必要があるために，エネルギー保存則から力を求めることは難しくなる。しかし，静電気力の本質は問２で描いた電荷によるものであるから，Qが同じであれば，電池が接続されているか否かによらず静電気力も同じである。従って，Q，C，Vの間に常に成り立つ関係を用いることで，コンデンサーに加える電圧Vが一定となる条件のもとで２極板間にはたらく静電気力を求めることができる。

問５　F_QからQを消去し，コンデンサーに加える電圧Vが一定となる条件のもとで極板にはたらく静電気力F_Vをxの関数として求めなさい。

ここで改めて，先ほどと同じコンデンサーの上側の極板を，図２のようにばね定数 k [N/m]の絶縁体でできたばねでつり下げた。下側の極板は固定されており，上側の極板は下側の極板と平行を保ったまま上下に抵抗なく運動できるようになっている。上側の極板の質量は m [kg]で，ばねの質量は無視できるものとする。

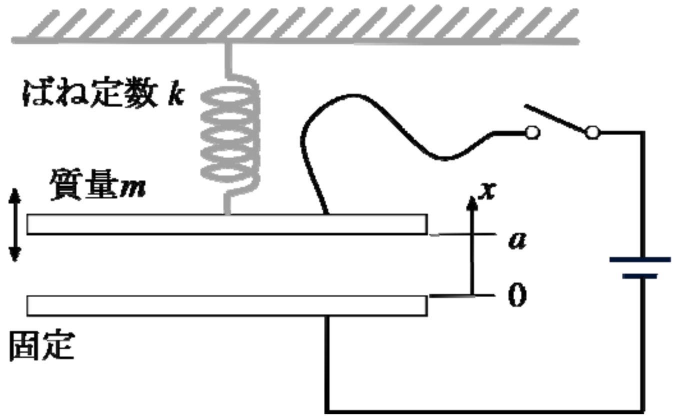

図２

まずはコンデンサーに電池がつながれておらず，電荷も蓄えられていないものとして，次の問いに答えなさい。

問６　$x=a$ でばねが自然長となっているとき，上側の極板をわずかに下方向に引っ張ってから離したところ，極板は単振動を始めた。ばねによって上側の極板にはたらく復元力 F_S [N]を x の関数として求めなさい。さらに，この振動の角振動数 ω [rad/s]を k と m で表しなさい。力は，極板に上向きの力がはたらくときに正，下向きの力がはたらくときに負となることに注意すること。

次に，電池を接続し，コンデンサーに電圧 V を加えた。これによりつりあいの位置は $x=b$ に変化した。

問７　問５で求めた静電気力 $F_V(x)$ と問６で求めたばねの復元力 $F_S(x)$ の概形を実線で，さらに，これら２つの力の合成力 $F(x)$ の概形を点線でグラフに描きなさい。このとき，静電気力がないときのつりあいの位置（$x=a$）と静電気力が加わったときの新たなつりあいの位置（$x=b$）も示しなさい。

問８　コンデンサーに電圧を加えることで，極板の単振動の角振動数がどう変化するかを，問７のグラフをもとに説明しなさい。

さらに，振動の角振動数の近似値を求めてみよう。振動の振幅が十分小さいとき，振動の中心位置となる $x=b$ のつりあいの位置付近で上側の極板にはたらく $F_V(x)$ は，$x=b$ における接線である $F_V(b)+F_V'(b)\cdot(x-b)$ で近似される。ただし，

$$F_V'(x)=\frac{dF_V(x)}{dx}$$

である。

問９　合成力 $F(x)$ をこの近似のもとで x の一次関数として表し，角振動数 ω を V の関数として求めなさい。ただし，解答では b を既知の定数として残してよい。

最後に，図２の電池を起電力が自由に変えられる直流電源に交換した。コンデンサーに加える電圧 V を正の方向に大きくしていくと，上側の極板のつりあいの位置が徐々に変化し，ある電圧 V_1 を境に突然下側の極板に吸いつけられた。

問１０　このときの電圧 V_1 を求めなさい。また，V の値が正負どちらも取り得る場合に，V がどのような範囲であればこのような突然吸いつけられる現象が起こらないかを答えなさい。なお，ここでは単振動の影響は考えなくてもよい。

この問題では解析をここまでとする。電気力顕微鏡では，このように，振動する金属探針の角振動数が，その直下の固体表面との間の電位差（この問題では電池によって与えられた電圧であった）に応じて変化することを電位計測の基本原理とする。目的に応じて，様々なタイプの電気力顕微鏡が用いられるが，多くの場合，固体表面の凹凸形状と電位等の電気的な信号を分離するために，さらに巧妙ないくつかの工夫を盛り込む。もう一方の凹凸形状の測定には，この問題で考えた静電気力より距離依存性のかなり強いファンデルワールス力などを検出する。その場合も，力を検出するための基本原理はこの問題と同じである。探針が固体表面すれすれまで近づくと，急激にはたらくファンデルワールス力によって探針の角振動数が変化することを利用し，角振動数が一定の値になるように固体表面との間隔を制御しながら表面を「なぞる」ことで凹凸形状の測定を行っている。