平成 23 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題 II-A　解答例

【出題のねらい】

ばねとおもりによる振動のモデルを使って，水中の気泡の発する音を考える問題です。なぜ水滴が水面に落下したときに澄んだ高い音が出るか，という問題は，古くから多くの人の興味を引きつけてきました（例えば，ロゲルギスト著「第四　物理の散歩道」岩波書店 1969 ,「水玉の物理」p.110〜p.133）。この問題で導出した式と導出方法は，1933 年に発表された気泡の振動に関する次の論文に基づいています。

Minnaert M: On musical air-bubbles and sounds of running water, *Phil. Mag* 16 (1933), 235–248.

気泡の振動現象をばねとおもりによる振動として見たときに，おもりに相当するのは周囲の水です。コイル状のばねや小物体としてのおもりと実際の気泡の振動現象とは見かけは異なっていますが，現象そのものや現象を表す式は共通です。このような発想は，高校生には馴染みがないかもしれませんが，これから物理や工学を学んでいく上で非常に大切な考え方です。例えば他にも，気泡の膨張・収縮過程で周囲の水に誘起する流れのパターンは，点電荷のつくる電場と共通です。電気力線を流線と対応させて考えることによって，いくつかの重要な事柄を知ることができます。

この問題では，自然科学の大原理であるエネルギー保存則と質量保存則に基づいて考察を進めて行きます。気泡の弾性力による位置エネルギーは，周囲の水の運動エネルギーにすべて使われるので，水の運動エネルギーが角振動数ωの関数として書ければ，気泡の振動数すなわち気泡の発生する音の周波数がわかるというのが考え方の筋道です。実際の気泡の振動では，球形を保ったまま体積が変化するような振動（呼吸振動，0 次モード）の他に，気泡表面の形状が時間的に変化するような振動（形状振動，高次モード）もありますが，ここでは 0 次モードの振動（澄んだ音）を考えます。水の運動エネルギーは，問題文の誘導に従って計算すると答えが出るようになっています。

基本的には力学の問題ですが，気泡のばね定数を計算するために，熱力学の関係式も使います。また，水の運動速度の分布を計算するために，質量保存則を使います。いろいろな物理の知識や考え方を組み合わせて解く必要がある問題です。

気泡の振動数がわかると，外部からその周波数の音波で気泡周囲の圧力を変化させることによって，気泡の共振を起こすことができます。問 4 の結果からわかるように気泡の振動数は気泡半径に反比例するので，気泡の径がうんと小さくなると，共振周波数は超音波の領域になります。医療の現場では超音波による画像診断が行われていますが，直径数ミクロンの気泡を血液中に注射して体内で共振が起きたときの信号の変化を捉えることによって，超音波の造影剤（例えばLevovist®，Optison® など）として微小な気泡が役立てられています。

【解答例】

【問1】

(a) おもりの位置xは，時刻$t = 0$で$x = 0$とすると，

$$x = A \sin \omega t \tag{1}$$

と書ける。おもりの運動速度vは，(1) 式を微分して，

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos \omega t \tag{2}$$

と書ける。したがって，おもりの運動エネルギーE_Kは，$x = 0$のとき，最大値$E_{K,\max} = \frac{1}{2}mA^2\omega^2$をとる。

(b) ばねの弾性力による位置エネルギーE_Pは，$x = \pm A$のとき，最大値$E_{P,\max} = \frac{1}{2}kA^2$をとる。

(c)

$$\text{運動方程式}:m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx = -kA \sin \omega t \tag{3}$$

$$\text{加速度}:\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \sin \omega t \tag{4}$$

より，$\omega^2 = \frac{k}{m}$。

単振動のエネルギーE_Tは，E_PとE_Kの和だから，

$$E_T = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2 \omega t + \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \cos^2 \omega t = \frac{1}{2}m\omega^2A^2(\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 \tag{5}$$

(d) $\omega^2 = \frac{k}{m}$の関係を使うと，(c)の結果はまた，

$$E_T = \frac{1}{2}kA^2 \tag{6}$$

と書ける。したがって，

$$E_T = E_{K,\max} = E_{P,\max} \tag{7}$$

【問2】

(a) 流れの速度がvだから，点PはΔt時間後には$v\Delta t$だけ移動する。したがって，求める半径r'は，$r' = r + v\Delta t$となる。

(b) 気泡表面の水は，気泡表面とともに運動する。したがって，

$$v_R = \frac{dR}{dt} = \frac{d}{dt}A\sin\omega t = A\omega\cos\omega t \tag{8}$$

(c) 移動前の質量：$\rho\left(\frac{4\pi r^3}{3} - \frac{4\pi R^3}{3}\right)$

移動後の質量：$\rho\left(\frac{4\pi(r+v\Delta t)^3}{3} - \frac{4\pi(R+v_R\Delta t)^3}{3}\right) \approx \rho\left\{\left(\frac{4\pi r^3}{3} - \frac{4\pi R^3}{3}\right) + \left(4\pi r^2 v\Delta t - 4\pi R^2 v_R\Delta t\right)\right\}$

移動前後で質量が変化しないので，

$$4\pi r^2 v\Delta t = 4\pi R^2 v_R\Delta t \tag{9}$$

よって求めるvは，

$$v = \frac{R^2}{r^2}v_R = \frac{R^2}{r^2}A\omega\cos\omega t \tag{10}$$

(d)

$$\begin{aligned} E_K &= \int_R^a \frac{1}{2}\rho v^2 4\pi r^2 dr = 2\pi\rho R^4 A^2\omega^2\cos^2\omega t\int_R^a \frac{1}{r^2}dr \\ &= 2\pi\rho R^4 A^2\omega^2\cos^2\omega t\left[-\frac{1}{r}\right]_R^a \to 2\pi\rho R^3 A^2\omega^2\cos^2\omega t \quad (a\to\infty) \end{aligned} \tag{11}$$

(b)の結果を用いて整理すると，

$$E_K = 2\pi\rho R^3\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}M\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 \tag{12}$$

よって，$M = 4\pi\rho R^3$

【問3】

(a) 図6より，ピストンにはたらく力のつりあいの式は，

$$pS - p_0 S + F = 0 \tag{13}$$

(b) 自然の状態での気泡の体積：$V_0 = \dfrac{4\pi R_0^3}{3}$

ピストンの移動量yのときの気泡の体積：$V = \dfrac{4\pi(R_0 + x)^3}{3}$

断熱変化：$pV^\gamma = p_0 V_0^\gamma$

これらより，

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{V}{V_0}\right)^{-\gamma} = \left(1 + \frac{x}{R_0}\right)^{-3\gamma} \tag{14}$$

よって求めるpは，

$$p = p_0\left(1 + \frac{x}{R_0}\right)^{-3\gamma} \tag{15}$$

(c) ピストンの移動後の気泡の体積Vは，

$$V = V_0 + Sy = \frac{4\pi(R_0 + x)^3}{3} \tag{16}$$

両辺を$V_0 = \dfrac{4\pi R_0^3}{3}$で割って

$$\frac{V}{V_0} = 1 + \frac{Sy}{V_0} = \left(1 + \frac{x}{R_0}\right)^3 \approx 1 + \frac{3x}{R_0} \tag{17}$$

よって，

$$y = \frac{V_0}{S}\frac{3x}{R_0} = \frac{4\pi R_0^2}{S}x \tag{18}$$

(d) (c)と同様にして(b)の結果を近似

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 + \frac{x}{R_0}\right)^{-3\gamma} \approx 1 - \frac{3\gamma x}{R_0} \tag{19}$$

これと(c)の結果を(a)の結果に代入。

$$F = (p_0 - p)S = p_0\frac{3\gamma x}{R_0}S = p_0\frac{3\gamma}{R_0}\frac{S^2}{4\pi R_0^2}y = \frac{3\gamma p_0 S^2}{4\pi R_0^3}y \tag{20}$$

ばね定数kを用いると$F = ky$と書けるから，

$$k = \frac{3\gamma p_0 S^2}{4\pi R_0^3} \tag{21}$$

(e) 気泡の弾性力による位置エネルギーE_pは,

$$E_p = \frac{1}{2}ky^2 = \frac{1}{2}\frac{3\gamma p_0 S^2}{4\pi R_0^3}y^2 \tag{22}$$

(c)の結果よりyをxであらわすと,

$$E_p = \frac{1}{2}\frac{3\gamma p_0 S^2}{4\pi R_0^3}\left(\frac{4\pi R_0^2}{S}\right)^2 x^2 = \frac{1}{2}(12\pi\gamma p_0 R_0)x^2 = \frac{1}{2}k' x^2 \tag{23}$$

よって,

$$k' = 12\pi\gamma p_0 R_0 \tag{24}$$

【問4】

(a) 運動エネルギーが最大となるのは, $\cos\omega t = 1$となるとき, すなわち$R = R_0$のときで,

$$E_{K,\max} = \frac{1}{2}MA^2\omega^2 \quad (M = M(R_0)) \tag{25}$$

気泡の弾性力による位置エネルギーが最大となるのは$x = \pm A$のときで,

$$E_{P,\max} = \frac{1}{2}k' A^2 \tag{26}$$

$E_{K,\max} = E_{P,\max}$とおくことにより,

$$\omega = \sqrt{\frac{k'}{M}} = \sqrt{\frac{12\pi\gamma p_0 R_0}{4\pi R_0^3 \rho}} = \frac{1}{R_0}\sqrt{\frac{3\gamma p_0}{\rho}} \tag{27}$$

気泡の振動数fは, $\omega = 2\pi f$より

$$f = \frac{1}{2\pi R_0}\sqrt{\frac{3\gamma p_0}{\rho}} \tag{28}$$

(b)

$$f = \frac{1}{2\pi \times 1.5 \times 10^{-3}}\sqrt{\frac{3 \times 1.4 \times 10^5}{1000}} = 2174\text{Hz} = 2.2\text{kHz} \tag{29}$$