平成 23 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

数学　解答例

数学 解答

今年は、計算力を測るため、例年より時間がかかる問題量にしました。

1

(1)

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{a}+1}{a+\sqrt{a}+1}-\frac{\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}+1} &= \frac{(\sqrt{a}+1)(a+1-\sqrt{a})}{(a+1+\sqrt{a})(a+1-\sqrt{a})}-\frac{(\sqrt{a}-1)(a+1+\sqrt{a})}{(a+1+\sqrt{a})(a+1-\sqrt{a})} \\
&= \frac{a(\sqrt{a}+1)+(1-a)-\{a(\sqrt{a}-1)+(a-1)\}}{(a+1)^2-a} \\
&= \frac{2a+2-2a}{(a+1)^2-a}=\frac{2}{a^2+a+1}
\end{aligned}$$

(2)

$$\frac{1}{x}=\frac{3}{2+\sqrt{13}}=\frac{3(2-\sqrt{13})}{(2+\sqrt{13})(2-\sqrt{13})}=-\frac{3}{9}(2-\sqrt{13})=-\frac{2-\sqrt{13}}{3}$$

$$\text{よって}\quad x-\frac{1}{x}=\frac{4}{3}$$

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=x^2-2+\frac{1}{x^2}=\left(\frac{4}{3}\right)^2\quad\text{よって}\quad x^2+\frac{1}{x^2}=\frac{34}{9}$$

(3)

$$\frac{\tan\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$$

ここで

$$\begin{aligned}
\sin\alpha &= \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \\
\sin\beta &= \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}
\end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}
\sin\alpha+\sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\sin\alpha-\sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}
\end{aligned}$$

よって

$$
与式 = \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta} = \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} - 1}{\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} + 1} = \frac{\dfrac{3}{2} - 1}{\dfrac{3}{2} + 1} = \frac{1}{5}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
a_1(1 + r + r^2 + \cdots + r^9) &= a_1 \frac{1 - r^{10}}{1 - r} = 2 \\
\frac{1}{a_1}\left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \cdots + \frac{1}{r^9}\right) &= \frac{1}{a_1} \frac{1 - \dfrac{1}{r^{10}}}{1 - \dfrac{1}{r}} = \frac{1}{a_1} \frac{1}{r^9} \frac{1 - r^{10}}{1 - r} = 3
\end{aligned}
$$

したがって

$$
a_1^2 r^9 = \frac{2}{3}
$$

$$
\begin{aligned}
a_1 a_2 \ldots a_{10} &= a_1 \cdot a_1 r \cdot a_1 r^2 \cdot \cdots \cdot a_1 r^9 \\
&= a_1^{10} \cdot r^{1+2+\cdots+9} \\
&= a_1^{10} \cdot r^{45} = (a_1^2 r^9)^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^5 \\
&= \frac{32}{243}
\end{aligned}
$$

2

(i) $y' = 3x^2$

接線は (α, α^3) を通るから、

$$
\begin{aligned}
y - \alpha^3 &= 3\alpha^2(x - \alpha) \\
y &= 3\alpha^2 x - 3\alpha^3 + \alpha^3 \\
&= 3\alpha^2 x - 2\alpha^3
\end{aligned}
$$

(ii) $y = x^3$ との交点では、

$$
x^3 = 3\alpha^2 x - 2\alpha^3 \quad より \quad (x - \alpha)^2(x + 2\alpha) = 0
$$

したがって、交点の x 座標は $x = -2\alpha$

(iii)

$$\int_{\alpha}^{-2\alpha}(3\alpha^2 x-2\alpha^3-x^3)dx=\left[\frac{3\alpha^2}{2}x^2-2\alpha^3 x-\frac{x^4}{4}\right]_{\alpha}^{-2\alpha}=\frac{27}{4}\alpha^4$$

または、

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{-2\alpha}(3\alpha^2 x-2\alpha^3-x^3)dx &= -\int_{\alpha}^{-2\alpha}(x-\alpha)^2(x+2\alpha)dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}(x-\alpha)^3(x+2\alpha)\right]_{\alpha}^{-2\alpha}+\frac{1}{3}\int_{\alpha}^{-2\alpha}(x-\alpha)^3 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}\frac{1}{4}(x-\alpha)^4\right]_{\alpha}^{-2\alpha}=\frac{1}{12}(-3\alpha)^4=\frac{27}{4}\alpha^4\end{aligned}$$

3

(i) $y=0$ を代入すると、

$$2f(x)f(0)=f(x)+f(x)=2f(x)$$
$$2f(x)(f(0)-1)=0$$

$f(x)$ は恒等的には 0 でないから、$f(0)=1$

(ii) x と y を置き換えて、$y=0$ を代入すると、

$$2f(0)f(x)=f(x)+f(-x)$$

(i) の結果 $f(0)=1$ を代入すると、$f(-x)=f(x)$

また、与式で $y=x$ とすると、

$$2f(x)f(x)=f(2x)+f(0)$$

だから、$f(2x)=2f^2(x)-1$

(iii) x を $x+y$ に、y を $x-y$ に置き換えると

$$2f(x+y)f(x-y)=f(x+y+x-y)+f(x+y-(x-y))=f(2x)+f(2y)$$

(ii) より

$$\begin{aligned}2f^2(x)+2f^2(y) &= f(2x)+f(0)+f(2y)+f(0) \\ &= 2f(x+y)f(x-y)+2f(0)\end{aligned}$$

したがって、

$$f^2(x)+f^2(y)=f(x+y)f(x-y)+f(0)$$

4

(i) $\vec{r}-\vec{r}_0$ は直線 l に平行なベクトルであるから、ベクトル $\vec{a}$ と垂直であり、

$$\begin{aligned} 0=\vec{a}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0) &= (a,\ b)\cdot(x-x_0,\ y-y_0) \\ &= ax+by-(ax_0+by_0) \end{aligned}$$

ここで、$c=-(ax_0+by_0)$ とすると、この方程式は

$$ax+by+c=0$$

となる。

(ii) H の座標を $\vec{r}_{\mathrm{H}}=(x_{\mathrm{H}},\ y_{\mathrm{H}})$ とする。$\vec{r}_{\mathrm{H}}$ は直線 l 上の点であるから、$\vec{a}\cdot(\vec{r}_{\mathrm{H}}-\vec{r}_0)=0$

ベクトル $\vec{r}_{\mathrm{H}}-\vec{r}_1$ は直線 l に垂直であるから、ベクトル $\vec{a}$ と平行で、

$$\vec{r}_{\mathrm{H}}-\vec{r}_1=k\vec{a}\quad(k\ \text{は定数})$$

と書ける。したがって、垂線 PH の長さは、$|\vec{r}_{\mathrm{H}}-\vec{r}_1|=|k||\vec{a}|$ である。ここで、

$$\vec{a}\cdot(\vec{r}_{\mathrm{H}}-\vec{r}_1)=k\vec{a}^2$$
$$k=\frac{\vec{a}\cdot\vec{r}_{\mathrm{H}}-\vec{a}\cdot\vec{r}_1}{\vec{a}^2}=\frac{\vec{a}\cdot(\vec{r}_0-\vec{r}_1)}{\vec{a}^2}$$

したがって、

$$\begin{aligned} |\vec{r}_{\mathrm{H}}-\vec{r}_1| &= \left|\frac{\vec{a}\cdot(\vec{r}_1-\vec{r}_0)}{\vec{a}^2}\right|\cdot|\vec{a}| \\ &= \frac{|\vec{a}\cdot(\vec{r}_1-\vec{r}_0)|}{|\vec{a}|} \end{aligned}$$