平成 24 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

数学　解答例

数学 解答例

1.

$x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{3-1}-\sqrt{3}-1=-\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2=\dfrac{3(4+2\sqrt{3})}{4}+2=\dfrac{10+3\sqrt{3}}{2}$

$x^3-\dfrac{1}{x^3}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\cdot\left(x^2+1+\dfrac{1}{x^2}\right)=-\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{12+3\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{45+21\sqrt{3}}{4}$

2.

与式を因数分解して，

$x^4-4x^3+2x^2+4x-3=(x-1)^2(x+1)(x-3)=(2i)^2(2i+2)(2i-2)=(-4)\times(-4-4)=32$

である。

3.

$\cos^2 15^\circ-\cos^2 75^\circ=\cos^2 15^\circ-\sin^2 15^\circ=\cos(2\times 15^\circ)=\cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

別解多数あり。$\cos 15^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ は既知としてよい。

4.

(1) 1 つの箱以外は白玉が出るので，

$\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}+\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}+\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{10}{24}=\dfrac{5}{12}$ である。

(2) 1 つの箱以外は赤玉が出るので，

$\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{9}{24}=\dfrac{3}{8}$ である。

5.

(1) $f(x)=(x-a)(x+2a)=(x+a/2)^2-9a^2/4$ なので，$x=-2a,\ a$ に x 軸との交点をもち，$x=-a/2$ を中心とした下に凸の放物線である。

(2) $S=\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2-2a^2x\right]_0^1=\frac{1}{3}+\frac{a}{2}-2a^2$

(3) (2) より，$S=\dfrac{35}{96}-2\left(a-\dfrac{1}{8}\right)^2$ であるから，$a=1/8$ のとき，最大値 $35/96$ をとる。

6.

(1) $\vec{\mathrm{OG}}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

(2) OA と BC が垂直なので，$\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c})=0$ である。したがって，

$$\begin{aligned}\mathrm{OC}^2+\mathrm{AB}^2-\mathrm{OB}^2-\mathrm{AC}^2&=|\vec{c}|^2+|\vec{a}-\vec{b}|^2-|\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{c}|^2=|\vec{c}|^2+|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2-|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{c}-|\vec{c}|^2\\&=-2\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c})=0\end{aligned}$$

となるので，題意は成立する。