平成 25 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題 II-A　解答例

$\boxed{\text{II-A}}$ ＜解答例＞

（出題意図）

- 振子の等時性という基本問題を題材にすることで，無用な複雑さを排除し，力学の基本事項に関する理解度を確認する。
- 物理学（力学）を，数 III レベルの数学を駆使して理解する能力があるかを確認する。

（解答例）

問 1 **(1)**

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx$$

(2)

$$x(t) = A\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$$
$$v(t) = -A\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$
$$a(t) = -A\frac{k}{m}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

(3)

$$\frac{1}{2}m\Big(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big)^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

(4)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (A\text{ に依存しない})$$

問 2 **(1)** 教科書に載っているばねの位置エネルギーを導く方法を参考にして導けばよい。図を描いて仕事（面積）を求める問題になる。すなわち

$$U = -\int_0^x f(x')\,\mathrm{d}x' = \int_0^x (kx' + px'^3)\,\mathrm{d}x' = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{4}px^4$$

(2) 下図のようになる。

(3) $p > 0$ なら周期 T は減少し，$p < 0$ なら周期 T は増加する。（理由）図を参照しながら説明すればよい。ばねの復元力は，$p > 0$ なら少し強まり，$p < 0$ なら少し弱まるから。また，その効果は変位が大きいほど顕著だから，$p > 0$ なら振幅が大きいほど周期は減少し，$p < 0$ なら振幅が大きいほど周期は増加する。（理由：別の説明）例えば $p < 0$ なら，振幅を $\alpha > 1$ 倍したとき，原点を通過する速度は増えるが，それは α 倍より小さい。すなわち，振幅の増加より速度の増加が小さいので。

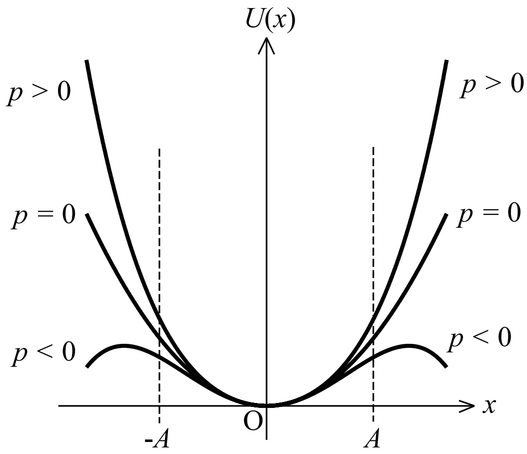

図 1: U の x 依存性

問 3 **(1)**

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -a\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$
$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = a\cos\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

(2)

$$K = \frac{1}{2}m\Big(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big)^2 + \frac{1}{2}m\Big(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big)^2 = \frac{1}{2}ma^2\Big(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\Big)^2$$

(3)

$$U = mg(a-x) = mga(1-\cos\theta)$$

(4)

$$\frac{1}{2}ma^2\Big(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\Big)^2 + mga(1-\cos\theta) = mga(1-\cos\theta_{\mathrm{m}})$$

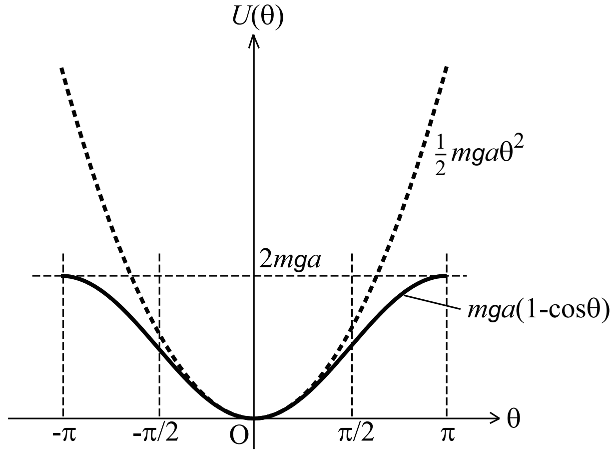

図 2: 単振子の位置エネルギーの θ 依存性

(5) 上式に $\cos\theta \simeq 1-\frac{1}{2}\theta^2$, $\cos\theta_{\rm m} \simeq 1-\frac{1}{2}\theta_m^2$ を代入してエネルギー保存則を書けば,

$$\frac{1}{2}ma^2\Big(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\Big)^2+\frac{1}{2}mga\,\theta^2=\frac{1}{2}mga\,\theta_m^2$$

となる。これは，質量 m，ばね定数 mg/a のばね振子のエネルギー保存則と等価だから，その周期は

$$T=2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$$

である。

(6) 周期 T は長くなる。

（理由 1）$U(\theta)$ の図を描き，問 2 と比較する。

図 2 のように，$U(\theta)$ の θ^2 の形からのずれは，θ が大きくなるほど顕著になるから，振幅が大きいほど周期は長くなる。

（理由 2）次の項まで展開してエネルギー保存則を書けば

$$\frac{1}{2}ma^2\Big(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\Big)^2+\frac{1}{2}mga\theta^2-\frac{1}{24}mga\theta^4+\cdots=\text{一定}$$

ここで θ^4 の項は負であり，有効ばね振子のばね定数 k を小さくするように働く。そしてその効果は，θ が大きくなるほど顕著だから，振幅が大きいほど周期は長くなる。

問 4 **(1)**

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2a(1+\cos2\theta)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$
$$v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2a\sin2\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

(2)

$$K=\frac{m}{2}\Big[\Big(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big)^2+\Big(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big)^2\Big]=4ma^2(1+\cos2\theta)\Big(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\Big)^2$$

(3)

$$U=mgy=mga(1-\cos2\theta)$$

(4) 曲線の長さを公式を用いて計算する。

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}=2a(1+\cos2\theta),\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}=2a\sin2\theta$$

より

$$\Big(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\Big)^2+\Big(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\Big)^2=8a^2(1+\cos2\theta)=(4a\cos\theta)^2$$

よって

$$s=\int_0^\theta 4a\cos\theta'\,\mathrm{d}\theta'=4a\sin\theta$$

となる。

(5) 三角関数の公式

$$1+\cos 2\theta = 2\cos^2\theta, \quad 1-\cos 2\theta = 2\sin^2\theta$$

を用いて上の K と U を書き変えれば,

$$K = \frac{1}{2}m\Big[4a\cos\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\Big]^2 = \frac{1}{2}m\Big(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big)^2$$
$$U = 2mga\sin^2\theta = \frac{mg}{8a}(4a\sin\theta)^2 = \frac{mg}{8a}s^2$$

よってエネルギー保存則は

$$\frac{1}{2}m\Big(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big)^2 + \frac{1}{2}\frac{mg}{4a}s^2 = \frac{1}{2}\frac{mg}{4a}s_{\mathrm{m}}^2$$

と書ける。

(6) 上式は質量 m，ばね定数 $mg/(4a)$ のばね振子のエネルギー保存則と等価だから，この系では周期は振幅 s_{m} によらず

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{4a}{g}}$$

である。