平成 25 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題 II-B　解答例

$\boxed{\text{II-B}}$ ＜解答例＞

[解説]

問１では，導体のそばに置かれた点電荷と導体表面に現れる誘導電荷がつくる電場の様子，点電荷の電位と誘導電荷から受ける力，静電エネルギーなどを鏡像法の考え方を用いて求めます。前半は点電荷が１つの場合を扱いますが，誘導電荷を点電荷に置き換えて導体表面と直交する電場を再現するという鏡像法の考え方を問題文から読み取り，後半の２つの点電荷からなる電気双極子の問題に応用して下さい。

問２では，**問１**の鏡像法の考え方を超伝導体のそばに置かれた電流や磁石がつくる磁場の問題に応用します。前半は直線電流の場合について，超伝導体の表面で平行になる磁場の性質を鏡像電流をどのように流せば再現できるか考えます。後半は，棒磁石を２つの磁極からなる磁気双極子として扱い，**問１**の後半とほぼ同じ計算によって磁気エネルギーを求めます。

問１

(1) 導体内部は等電位なのでその表面は等電位面になる。電気力線は等電位面と直交するので，導体表面と直交することになる。

(2) 電気力線が導体の表面に垂直になるようにするには，電荷 $-q$ の点電荷をおけばよい。

(3) 略。

(4) 誘導電荷が作る電場は図２の点電荷 X が作る電場と同じである。

$$\text{大きさ } k_e\frac{q^2}{4a^2} \qquad \text{向きは } z \text{ 軸の負の方向}$$

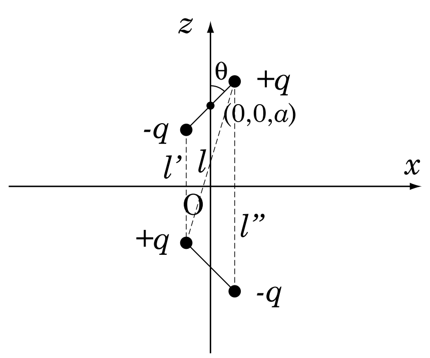
(5)

$$\text{電位} \quad -k_e\frac{q}{2a} \qquad \text{静電エネルギー} \quad -k_e\frac{q^2}{4a}$$

(6) ２つの点電荷についてそれぞれ，xy 面について対称の位置に大きさは同じで逆符号の点電荷をおく。

$$\text{点 } \left(\frac{d}{2}\sin\theta, 0, -a-\frac{d}{2}\cos\theta\right) \text{ に} -q \qquad \text{点 } \left(-\frac{d}{2}\sin\theta, 0, -a+\frac{d}{2}\cos\theta\right) \text{ に } +q$$

(7) 図のように点電荷間の距離を l, l', l'' とおくと



$$l=\sqrt{4a^2+d^2\sin^2\theta}\qquad l'=2a-d\cos\theta\qquad l''=2a+d\cos\theta$$

$$\text{電荷 }+q\quad V_+=k_\mathrm{e}q\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{l''}\right)=k_\mathrm{e}q\left(\frac{1}{\sqrt{4a^2+d^2\sin^2\theta}}-\frac{1}{2a+d\cos\theta}\right)$$

$$\text{電荷}-q\quad V_-=k_\mathrm{e}q\left(-\frac{1}{l}+\frac{1}{l'}\right)=k_\mathrm{e}q\left(-\frac{1}{\sqrt{4a^2+d^2\sin^2\theta}}+\frac{1}{2a-d\cos\theta}\right)$$

$$U=\frac{k_\mathrm{e}q^2}{2}\left(\frac{2}{l}-\frac{1}{l'}-\frac{1}{l''}\right)=\frac{k_\mathrm{e}q^2}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{4a^2+d^2\sin^2\theta}}-\frac{1}{2a-d\cos\theta}-\frac{1}{2a+d\cos\theta}\right)$$

(8) 近似式を用いると

$$U\approx-\frac{k_eq^2d^2}{2(2a)^3}(1+\cos^2\theta)$$

となり，$\theta=0$ のとき最小

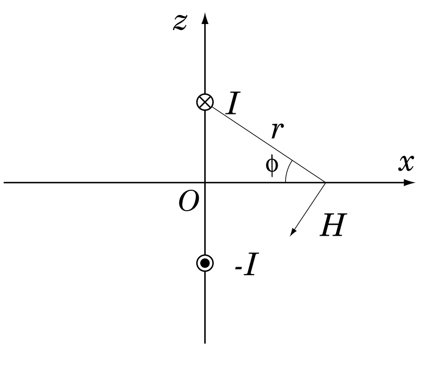
(9) 距離 a を増やすときの静電エネルギーの変化量は，棒に働く力とつり合うような力を加えて棒を動かすときの仕事に等しく，これは正である。したがって，棒には導体板に引き寄せるような力が働いている。

問 2

(1) 大きさ I 点 $(0,0,-a)$ を通り y 軸の負の方向

(2) y,z 成分は 0。x 成分は，電流 I が作る磁場の x 成分を 2 倍して

$$-2\frac{I}{2\pi r}\sin\phi=-\frac{I}{\pi}\frac{a}{r^2}=-\frac{I}{\pi}\frac{a}{a^2+x^2}$$



(3)

$$\text{長さ }l\text{ あたり}\mu\frac{I^2}{4\pi a}l\qquad\text{方向は }z\text{ 軸の正の方向}$$

(4)

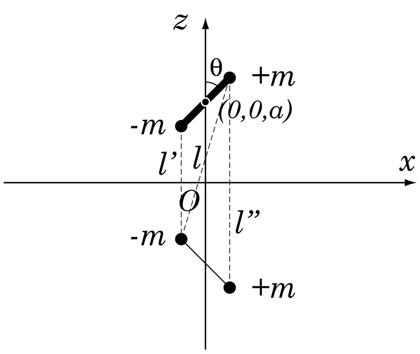
$$k_m\frac{m_1m_2}{r}$$

(5) ２つの磁極についてそれぞれ，xy 面について対称の位置に大きさは同じで同符号の磁極をおく。

$$\text{点 }(\frac{d}{2}\sin\theta,0,-a-\frac{d}{2}\cos\theta)\text{ に }+m\qquad\text{点 }(-\frac{d}{2}\sin\theta,0,-a+\frac{d}{2}\cos\theta)\text{ に }-m$$

(6) 上問と同様に

$$U=\frac{k_{\mathrm{m}}m^2}{2}\left(-\frac{2}{l}+\frac{1}{l'}+\frac{1}{l''}\right)=\frac{k_{\mathrm{m}}m^2}{2}\left(-\frac{2}{\sqrt{4a^2+d^2\sin^2\theta}}+\frac{1}{2a-d\cos\theta}+\frac{1}{2a+d\cos\theta}\right)$$



(7) 近似式を用いると

$$U\approx\frac{k_m m^2 d^2}{2(2a)^3}(1+\cos^2\theta)$$

となり，$\theta=\pi/2$ のとき最小

(8) 距離 a を増やすときの磁気エネルギーの変化量は，棒磁石に働く力とつり合うような力を加えて棒磁石を動かすときの仕事に等しく，これは負である。したがって，棒には超伝導体から反発力を受けている。