平成 25 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

数学　解答例

$\boxed{\text{数学}}$　＜解答例＞

広い知見を問う為に、数学A，B，C，Ⅰ，Ⅱ，Ⅲの各教科から出題した。

問 1

平方根が自然数であるためには，n は 21=3x7 と平方数の積でなければならない。

1000/21=47.62 であるので，可能な平方数は 1，4，9，16，25，36 の 6 個である。ゆえに、6 個

問 2

式を変形すると，$a(x+y+1)+(2x-y-4)=0$ であるので，a の値によらず，$x+y+1=0$ と $2x-y-4=0$ の交点を通る。交点の座標は(1,-2)

問 3

$$\log_9 144 = \frac{\log_3 144}{\log_3 9} = \frac{\log_3 12^2}{\log_3 3^2} = \frac{2\log_3 12}{2\log_3 3} = \frac{2\log_3(3\times 4)}{2\log_3 3} = \frac{\log_3 3 + \log_3 4}{\log_3 3} = 1 + 2\log_3 2$$

よって

$\log_9 144 - \log_3 2 = 1 + 2\log_3 2 - \log_3 2 = 1 + \log_3 2$　　従って A=1, B=1

問 4

(1)　反時計回りにθ回転する行列は $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$\theta = 120°$　より $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(2)

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},\quad A^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},\quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$A+A^2+A^3=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1 & -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}+0 & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O$$

$$\sum_{n=1}^{10} A^n = A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6+A^7+A^8+A^9+A^{10}$$

$$=A+A^2+E+A+A^2+E+A+A^2+E+A=3\left(A+A^2+E\right)+A$$

$$=3O+A=\begin{pmatrix} 0-\frac{1}{2} & 0-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0+\frac{\sqrt{3}}{2} & 0-\frac{1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}=A$$

問 5

交点は$(1/4,1)$と$(9/4,3)$。 積分しやすくする為に，座標を入れ替えると

$y=\frac{x^2}{4}$と$y=x-\frac{3}{4}$なので，求める積分は$\int_1^3\left(x-\frac{3}{4}-\frac{x^2}{4}\right)dx=\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x-\frac{1}{12}x^3\right]_1^3$

$$=\left(\frac{9}{2}-\frac{9}{4}-\frac{27}{12}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}-\frac{1}{12}\right)=\frac{8}{2}-\frac{6}{4}-\frac{26}{12}=4-\frac{3}{2}-\frac{13}{6}=\frac{24-9-13}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

問 6

a,b,cはそれぞれの$1\le a,b,c\le 6$の整数

(1) 重解は判別式 $\sqrt{b^2-4ac}=0$の時，すなわち$b^2=4ac$， $b^2/4=ac$

$b^2/4$の取りうる値は 1/4, 4/4, 9/4, 16/4, 25/4, 36/4 であり，これがacと等しいことより，整数である必要がある。

従って　$b=2$の時 $b^2/4=1$， $a=1$　$c=1$

$b=4$の時 $b^2/4=4$， $a=2$　$c=2$， $a=1$　$c=4$， $a=4$　$c=1$

$b=6$の時 $b^2/4=9$， $a=3$　$c=3$

以上の 5 通り　従って$\frac{5}{6\times6\times6}=\frac{5}{216}$

(2)

2 つの解を α， β とすると

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)=ax^2-a(\alpha+\beta)x+a\alpha\beta=0$$

$$b=-a(\alpha+\beta),\quad c=a\alpha\beta$$

$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}>0$ より $\alpha>0$ かつ $\beta>0$ または $\alpha<0$ かつ $\beta<0$

$\alpha+\beta=-\dfrac{a}{b}<0$ より $\alpha<0$ かつ $\beta<0$ のみがあてはまる。

別解

a,b,c > 0 であるから、$ax^2+c > 0$

一方、$ax^2+bx+c = 0$ より、$ax^2+c = -bx > 0$ となるので、題意を満たす x は常に負でなければならない。