平成 26 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題 II-B　解答例

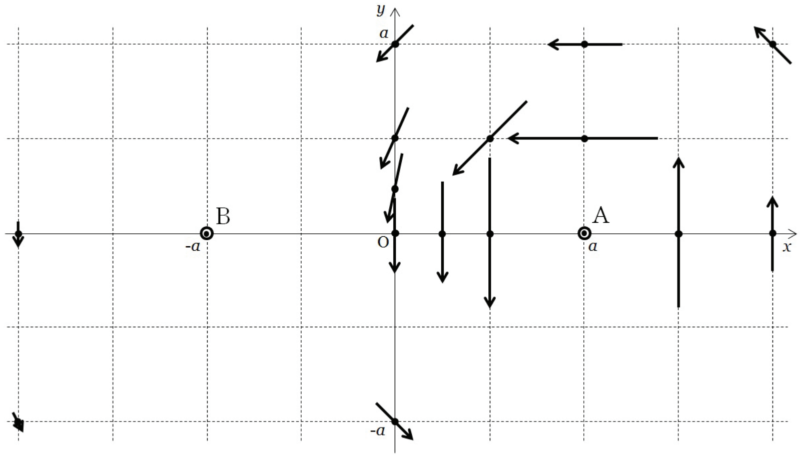
$\boxed{\text{II-B}}$ 解答例

出題意図
直線電流を題材に，重ね合わせの原理を用いてどのような磁場が形成されるかについて理解できているか，を問う。これらの理解のために必要なベクトルの扱いおよびそれに伴う煩雑な計算を適切に行う能力があるのかについても問う。基本的には方針が理解できれば大きく変わった計算を行う必要はないが，方針に従ってしつこく計算を進めることができる能力は，大学に進学した場合，大いに役に立つので，その能力を問いたい。

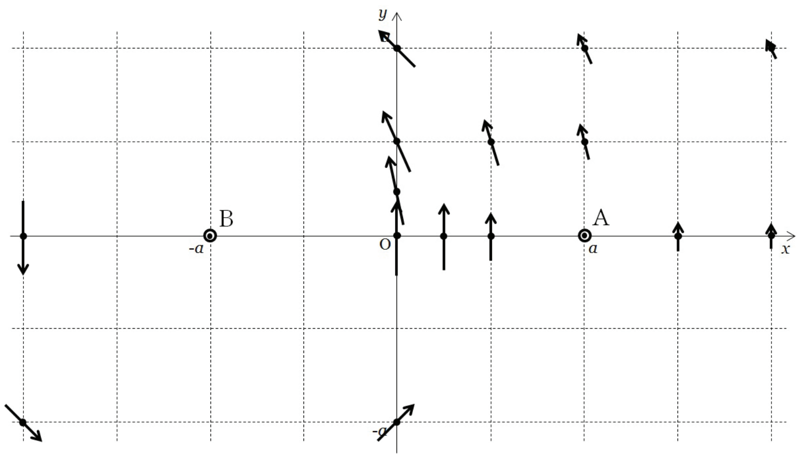
問 1.
(1)
$H_1 = \dfrac{I}{2\pi r}$

(2)
(1) より，
$B_1 = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} = 2.67 \times 10^{-4}$ [T]
となる。

(3)，(4)
まず，点 A を通る直線電流を考える。$|\vec{H}_{2\mathrm{A}}(0,0)| = H_{2\mathrm{A}}(a) = \dfrac{I}{2\pi a} \equiv H_2 = 2$ とおく。すると，
$H_{2\mathrm{A}}(a/2) = 2H_2 = 4$，$H_{2\mathrm{A}}(\sqrt{2}a/2) = \sqrt{2}H_2 \simeq 2.8$，$H_{2\mathrm{A}}(3a/4) = \frac{4H_2}{3} \simeq 2.7$，$H_{2\mathrm{A}}(\sqrt{17}a/4) = \dfrac{4H_2}{\sqrt{17}} \simeq 1.9$，$H_{2\mathrm{A}}(\sqrt{5}a/2) = \frac{2H_2}{\sqrt{5}} \simeq 1.8$，$H_{2\mathrm{A}}(\sqrt{2}a) = \dfrac{H_2}{\sqrt{2}} \simeq 1.4$，$H_{2\mathrm{A}}(3a) = \dfrac{H_2}{3} \simeq 0.7$，$H_{2\mathrm{A}}(\sqrt{10}a) = \frac{H_2}{\sqrt{10}} \simeq 0.6$
となる。磁場の向きは，電流の向きに右ねじの進む向きをあわせるとき，右ねじのまわる向きに等しいので，原点 A（もしくは B）を中心にして，反時計回りの渦を巻き，原点 A（もしくは B）と磁場を求める点を結んだ直線に垂直である。したがって，図のように矢印を描けばよい。
$H_{2\mathrm{B}}$ については，磁場の大きさに関しては，
$H_{2\mathrm{B}}(5a/4) = \dfrac{4H_2}{5} = 1.6$，$H_{2\mathrm{B}}(3a/2) = \dfrac{2H_2}{3} \simeq 1.3$，$H_{2\mathrm{B}}(\sqrt{10}a/2) = \frac{\sqrt{10}H_2}{5} \simeq 1.3$，$H_{2\mathrm{B}}(5a/2) = \dfrac{2H_2}{5} = 0.8$，$H_{2\mathrm{B}}(\sqrt{17}a/2) = \frac{2H_2}{\sqrt{17}} \simeq 1.0$，$H_{2\mathrm{B}}(\sqrt{5}a) = \dfrac{H_2}{\sqrt{5}} \simeq 0.9$
を追加して，矢印を描けばよい。

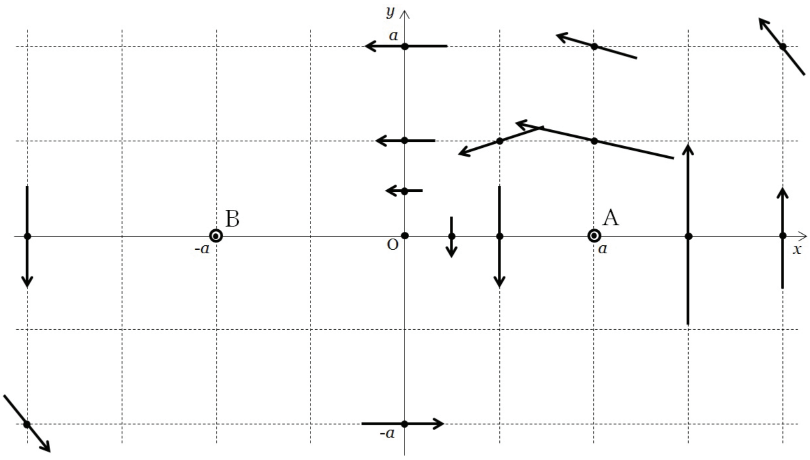


図：問 1(3) 解答例



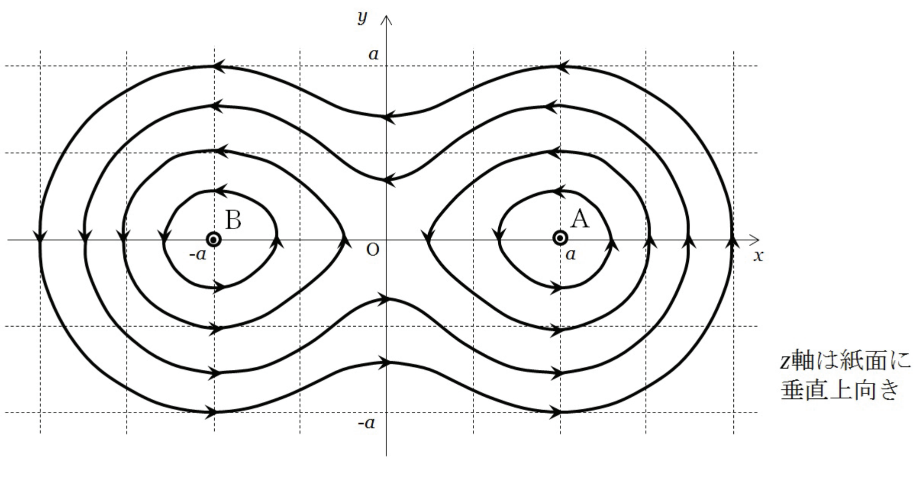
図：問 1(4) 解答例

(5)
(3)，(4) の結果を重ね合わせると，図のようになる。原点 O 付近で磁場の大きさが線形に変化しているように見える。



図：問 1(5) 解答例

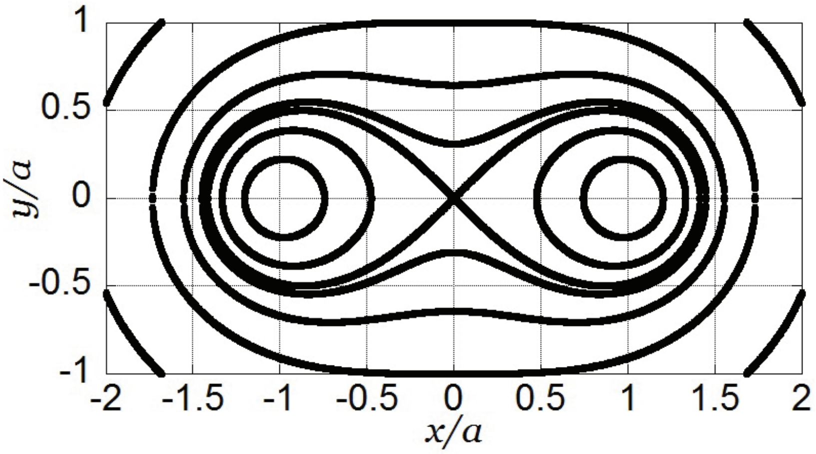
(6)
(5) の結果を参考にすると，図のようになる。x 軸，y 軸に直交している様子が描けていることが重要。原点 O 付近では，$y = \pm x$ の直線を漸近線として，磁束線の向きが変わるが，その部分は必ずしも重要視しない（これを示すためには，展開を行なわなければならないため）。また，$x = \pm a$ 付近での磁力線の向きは，実際には (5) のように角度をもっているが，概形が描けていれば正答とする。



図：問 1(6) 解答例

さらに正確な図としてはその次の図になるが，これを描くにはベクトルポテンシャ

ルの絶対値が等しい点を集めた曲線を描く必要があり，これは解答者に対しては求めていない。



図：問 1(6) の解答の正確な図

問 2.

(1)

$H_{\mathrm{A}} = \dfrac{I}{2\pi\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}$

である。$\vec{H}_{\mathrm{A}}$ の方向を表す単位ベクトルを $\vec{e}_{\mathrm{A}}(x,y)$ とすると，$\vec{e}_{\mathrm{A}}(x,y)$ は，ベクトル $(x-a, y-b)$ と直交する単位ベクトルである。したがって，符号を右ねじの法則にあわせると，

$$\vec{e}_{\mathrm{A}}(x,y) = \left(\frac{-(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}, \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}\right)$$

であるから，

$$\vec{H}_{\mathrm{A}}(x,y) = H_{\mathrm{A}}\vec{e}_{\mathrm{A}}(x,y) = \left(\frac{-I(y-b)}{2\pi\{(x-a)^2+(y-b)^2\}}, \frac{I(x-a)}{2\pi\{(x-a)^2+(y-b)^2\}}\right)$$

である。

(2)

$$\begin{aligned}\vec{H}_{\mathrm{A}}(x,0) &= \left(\frac{I}{2\pi\sqrt{(x-a)^2+b^2}}\cdot\frac{b}{\sqrt{(x-a)^2+b^2}}, \frac{I}{2\pi\sqrt{(x-a)^2+b^2}}\cdot\frac{(x-a)}{\sqrt{(x-a)^2+b^2}}\right)\\ &= \left(\frac{Ib}{2\pi\{(x-a)^2+b^2\}}, \frac{I(x-a)}{2\pi\{(x-a)^2+b^2\}}\right)\end{aligned}$$

である。同様にして，

$$\vec{H}_{\mathrm{B}}(x,0) = \left(\frac{Ib}{2\pi\{(x+a)^2+b^2\}}, \frac{I(x+a)}{2\pi\{(x+a)^2+b^2\}}\right)$$

$$\vec{H}_{\mathrm{C}}(x,0) = \left(\frac{-Ib}{2\pi\{(x-a)^2+b^2\}}, \frac{I(x-a)}{2\pi\{(x-a)^2+b^2\}}\right)$$

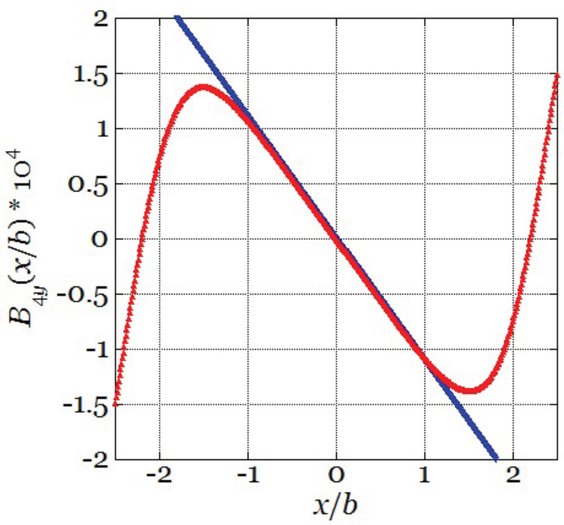
$$\vec{H}_{\mathrm{D}}(x,0)=\left(\frac{-Ib}{2\pi\{(x+a)^2+b^2\}},\frac{I(x+a)}{2\pi\{(x+a)^2+b^2\}}\right)$$
となるので，すべてを足すと，
$$\begin{aligned}\vec{H}_4(x,0)&=\vec{H}_{\mathrm{A}}(x,0)+\vec{H}_{\mathrm{B}}(x,0)+\vec{H}_{\mathrm{C}}(x,0)+\vec{H}_{\mathrm{D}}(x,0)\\&=\left(0,\frac{I}{\pi}\left\{\frac{x-a}{(x-a)^2+b^2}+\frac{x+a}{(x+a)^2+b^2}\right\}\right)\end{aligned}$$
となる。

(3)
(2) より，$H_{4y}(x)=\dfrac{I}{\pi}\left\{\dfrac{x-a}{(x-a)^2+b^2}+\dfrac{x+a}{(x+a)^2+b^2}\right\}$
である。したがって，
$$H_{4y}(-x)=\frac{I}{\pi}\left\{-\frac{x+a}{(x+a)^2+b^2}-\frac{x-a}{(x-a)^2+b^2}\right\}=-H_{4y}(x)$$
であるので，$H_{4y}(x)$ は奇関数である。

(4)
$H_{4y}(x)$ は奇関数なので，近似式も偶数次の項は存在しない。つまり，1 次と 3 次の項のみを考えればよい。したがって，
$$\begin{aligned}H_{4y}(x)&=\frac{I}{\pi}\left(\frac{x-a}{a^2+b^2-2ax+x^2}+\frac{x+a}{a^2+b^2+2ax+x^2}\right)\\&=\frac{I}{\pi(a^2+b^2)}\left[(x-a)\left\{1-\frac{2a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2+b^2}}+\left(\frac{x}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2\right\}^{-1}\right.\\&\qquad\left.+(x+a)\left\{1+\frac{2a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2+b^2}}+\left(\frac{x}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2\right\}^{-1}\right]\\&\simeq\frac{I}{\pi(a^2+b^2)}\left[(x-a)\left\{1+\frac{2a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2+b^2}}+\left(\frac{4a^2}{a^2+b^2}-1\right)\cdot\frac{x^2}{a^2+b^2}\right.\right.\\&\qquad\left.+2a\left(\frac{4a^2}{a^2+b^2}-2\right)\cdot\frac{x^3}{(a^2+b^2)^2}\right\}\\&\qquad+(x+a)\left\{1-\frac{2a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2+b^2}}+\left(\frac{4a^2}{a^2+b^2}-1\right)\cdot\frac{x^2}{a^2+b^2}\right.\\&\qquad\left.\left.-2a\left(\frac{4a^2}{a^2+b^2}-2\right)\cdot\frac{x^3}{(a^2+b^2)^2}\right\}\right]\\&=\frac{I}{\pi(a^2+b^2)}\left(2x-\frac{4a^2x}{a^2+b^2}\right)+\frac{I}{\pi(a^2+b^2)}\left\{\frac{2(3a^2-b^2)x^3}{(a^2+b^2)^2}-\frac{8a^2(a^2-b^2)x^3}{(a^2+b^2)^3}\right\}\\&=-\frac{2I(a^2-b^2)x}{\pi(a^2+b^2)^2}-\frac{2I\{a^2-(3+2\sqrt{2})b^2\}\{a^2-(3-2\sqrt{2})b^2\}x^3}{\pi(a^2+b^2)^4}\end{aligned}$$
である。

(5)
(4) より，x の 3 次の項が存在しなければ，一定の勾配をもつ磁場が得ることができる。したがって，$a \geq b$ なので，
$\dfrac{a}{b} = \sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} = \sqrt{2}+1$
である。

(6)
(2) の近似を用いない式から計算すると，



図：平行 4 本線の磁場（曲線）とその近似（直線）による磁場

$B_{4y}(b) = \mu_0 H_{4y}(b) = \dfrac{\mu_0 I}{\pi}\left\{\dfrac{-\sqrt{2}b}{2b^2+b^2} + \dfrac{(\sqrt{2}+2)b}{(\sqrt{2}+2)^2b^2+b^2}\right\} = -\dfrac{(20\sqrt{2}-18)\mu_0 I}{51\pi b} = -1.08 \times 10^{-4}$ [T]
となる。また，(4) の近似式から計算すると，
$B_{4y}(b) = \mu_0 H_{4y}(b) = -\dfrac{2\mu_0 I((3+2\sqrt{2})b^2-b^2)b}{\pi((3+2\sqrt{2})b^2+b^2)^2} = -\dfrac{(\sqrt{2}-1)\mu_0 I}{2\pi b} = -1.10 \times 10^{-4}$ [T]
である。b は $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{4+2\sqrt{2}}b$ に対して十分小さいとは言えないが，有効数字 3 桁の範囲では，この程度の距離まで約 2%の誤差で近似が成り立っていることがわかる。

問 3.
最も簡単な例。
問 2. において，点 B と点 C について電流の向きを逆にする（a と b の関係はあとから決めるものとする）。このとき，4 本の直線導線を流れる電流によって，xy 平

面の x 軸上に作られる磁場 $\vec{H}_4(x,0)$ は，

$$\vec{H}_{\mathrm{A}}(x,0)=\left(\frac{Ib}{2\pi\{(x-a)^2+b^2\}},\frac{I(x-a)}{2\pi\{(x-a)^2+b^2\}}\right)$$

$$\vec{H}_{\mathrm{B}}(x,0)=\left(\frac{-Ib}{2\pi\{(x+a)^2+b^2\}},\frac{-I(x+a)}{2\pi\{(x+a)^2+b^2\}}\right)$$

$$\vec{H}_{\mathrm{C}}(x,0)=\left(\frac{Ib}{2\pi\{(x-a)^2+b^2\}},\frac{-I(x-a)}{2\pi\{(x-a)^2+b^2\}}\right)$$

$$\vec{H}_{\mathrm{D}}(x,0)=\left(\frac{-Ib}{2\pi\{(x+a)^2+b^2\}},\frac{I(x+a)}{2\pi\{(x+a)^2+b^2\}}\right)$$

となるので，すべてを足すと，

$$\begin{aligned}\vec{H}_4(x,0)&=\vec{H}_{\mathrm{A}}(x,0)+\vec{H}_{\mathrm{B}}(x,0)+\vec{H}_{\mathrm{C}}(x,0)+\vec{H}_{\mathrm{D}}(x,0)\\&=\left(\frac{Ib}{\pi}\left\{\frac{1}{(x-a)^2+b^2}-\frac{1}{(x+a)^2+b^2}\right\},0\right)\end{aligned}$$

となる。そこで，$\vec{H}_4$ の x 成分 H_{4x} を $|x|\ll\sqrt{a^2+b^2}$ の領域で近似すると，

$$\begin{aligned}H_{4x}(x)&=\frac{Ib}{\pi}\left(\frac{1}{a^2+b^2-2ax+x^2}-\frac{1}{a^2+b^2+2ax+x^2}\right)\\
&=\frac{Ib}{\pi(a^2+b^2)}\left\{\left(1-\frac{2a}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{x}{\sqrt{a^2+b^2}}+\left(\frac{x}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2\right)^{-1}\right.\\
&\qquad\left.-\left(1+\frac{2a}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{x}{\sqrt{a^2+b^2}}+\left(\frac{x}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2\right)^{-1}\right\}\\
&\simeq\frac{Ib}{\pi(a^2+b^2)}\left\{\left(1+\frac{2a}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{x}{\sqrt{a^2+b^2}}+\left(\frac{4a^2}{a^2+b^2}-1\right)\left(\frac{x}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2\right.\right.\\
&\qquad\left.+2a\left(\frac{4a^2}{a^2+b^2}-2\right)\frac{x^3}{(a^2+b^2)^2}\right)\\
&\qquad-\left(1-\frac{2a}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{x}{\sqrt{a^2+b^2}}+\left(\frac{4a^2}{a^2+b^2}-1\right)\left(\frac{x}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2\right.\\
&\qquad\left.\left.-2a\left(\frac{4a^2}{a^2+b^2}-2\right)\frac{x^3}{(a^2+b^2)^2}\right)\right\}\\
&=\frac{4Iabx}{\pi(a^2+b^2)^2}+\frac{8Iab(a^2-b^2)x^3}{\pi(a^2+b^2)^4}\end{aligned}$$

となる。つまり，$b=a$ と選べば，3 次の項が消えるので，一定の勾配が得られることがわかる。これ以外の配置でも，同様のことが示すことができれば正答とするが，結局のところこの平行 4 本線の亜流にしかならないと思われる。

ちなみに，電流の向きを変える点を，点 C と点 D として，a と b の関係を定めると x の 2 次の項が消えて，均一な磁場を得ることができる。これはヘルムホルツコイルをある断面で切ったものと等価であると見なすことができる。