平成 26 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

数学　解答例

$\boxed{\text{数学}}$ 解答例

問 1 　$x+y=(4-\sqrt{15})+(4+\sqrt{15})=8$，$xy=1$ より

(1) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=62$

(2) $x^3+y^3=(x+y)\{(x+y)^2-3xy\}=8\times 61=488$

問 2

(1) それぞれの玉について m 通りの箱の選び方があるので，全部で m^n 通り。1 番の箱が空のとき，玉の入れ方は $(m-1)^n$ 通りあるので，求める確率は

$$\left(\frac{m-1}{m}\right)^n$$

(2) n 個の玉を 1 列に並べ，その間に $m-1$ 個の仕切りを入れることで，玉の入れ方を表現できる。この並べ方は，$n+m-1$ 個の場所から $m-1$ 個選ぶ場合の数に等しいので

$$_{n+m-1}\mathrm{C}_{m-1}=\frac{(n+m-1)!}{n!\,(m-1)!}$$

問 3 　真数は正であるから，$7-2x>0$ かつ $x-2>0$ なので，

$$2<x<\frac{7}{2} \qquad (1)$$

また

$$\log_{\sqrt{a}}(x-2)=\frac{\log_a(x-2)}{\log_a\sqrt{a}}=2\log_a(x-2)=\log_a(x-2)^2$$

であるから

$$7-2x \geqq (x-2)^2$$
$$x^2-2x-3=(x-3)(x+1)\leqq 0 \qquad -1\leqq x\leqq 3$$
$$(1)\text{ と合わせて}\qquad 2<x\leqq 3$$

問 4

(1) $\sin 2\theta=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-2\theta\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{5}\right)=\cos 3\theta$

(2) **(1)** の式の両辺はそれぞれ

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$$
$$\cos 3\theta=\cos\theta\cos 2\theta-\sin\theta\sin 2\theta=\cos\theta-4\cos\theta\sin^2\theta$$

これらを等しいおくと

$$4\sin^2\theta+2\sin\theta-1=0 \qquad \sin\theta=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

問 5

(1) 2 つの接点の x 座標は，方程式 $f'(x)=a$ の解であるから

$$f'(x)=3x^2-\frac{4}{9}=a \qquad x=\pm\sqrt{\frac{a}{3}+\frac{4}{27}}$$

(2) 条件を満たす 2 つの接点の x 座標を $\pm p$ とすると，$f(p)=f(-p)$ が成り立つので

$$f(p)-f(-p)=2p^3-\frac{8}{9}p=0 \qquad p=\pm\frac{2}{3}$$
$$f\left(\frac{2}{3}\right)=0$$

よって，求める方程式は $y=0$。

(3) 求める面積 S は

$$S=\int_{-\frac{2}{3}}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{\frac{2}{3}}(-f(x))dx=2\int_{-\frac{2}{3}}^{0}\left(x^3-\frac{4}{9}x\right)dx=2\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2}{9}x^2\right]_{-\frac{2}{3}}^{0}=\frac{8}{81}$$

問 6

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-2,1,2)$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(t-1,0,-5)$

(2) $\angle\mathrm{BAP}$ を θ とおくと $\triangle\mathrm{PAB}$ の面積 $S(t)$ は

$$S(t)=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AP}\sin\theta=\frac{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AP}}|}{2}\sqrt{1-\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AP}}|}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}})^2}$$

$\mathrm{AP}^2=t^2-2t+26$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=-2t-8$ より

$$S(t)=\frac{1}{2}\sqrt{9(t^2-2t+26)-(2t+8)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{5(t-5)^2+45}$$

$t=5$ のとき最小値 $\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$ となる。