

平成 26 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述

課題[II-A], [II-B], [II-C]

( 10:00 – 15:30 )

#### 注意事項

課題 II には、[II-A]、[II-B]、[II-C]の 3 題があります。

志望するコースによって、次に示す問題を解答してください。

- ・物理学コース：  
[II-A]、[II-B]の 2 題を解答してください。
- ・フロンティアテクノロジーコース：  
[II-A]、[II-B]、[II-C]の中から 2 題を選択して解答してください。

## II-A

**問 1** 質量  $m$  の小球 A, B が、長さ  $2l$  の軽くて細い伸び縮みしないひもで結ばれている。図 1 のように、水平でなめらかな机の上面の右端から距離  $l$  の位置に小球 B を固定し、小球 A を右上端から鉛直下方向につるした。机の右上端には、図 2 のように、大きさの無視できる小さなパイプが取り付けられていて、ひもや小球 B はパイプの内側をパイプに沿ってなめらかに動いて方向を変える。時刻  $t = 0$  に、小球 B の固定を静かにはずすと、2 つの小球はひもが張ったまま動き始めた。重力加速度の大きさを  $g$  として、以下の問いに答えなさい。

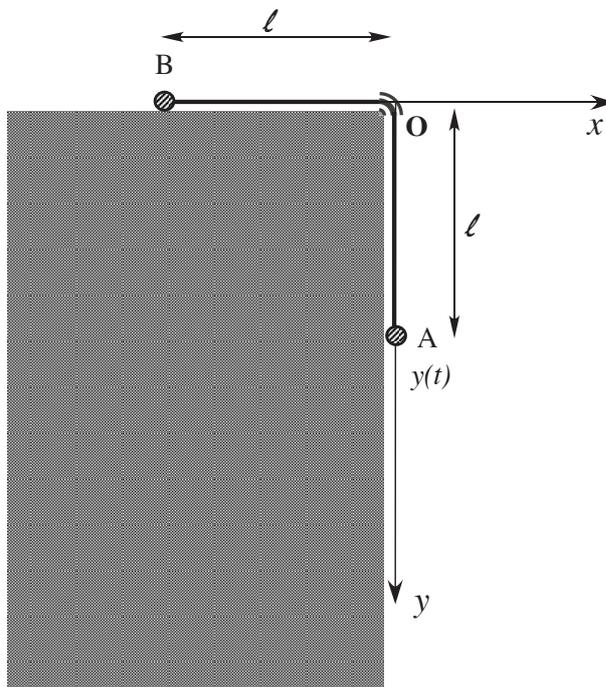
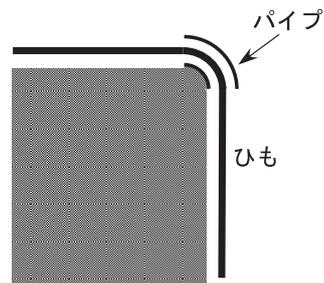


図 1



机の右上端近くの様子

図 2

まず、小球 B が動き始めてから机の右上端に到着するまでの運動を考えよう。机の右上端を原点  $O$  とし、図 1 のように、 $x$ ,  $y$  軸を取る（それぞれ右方向、鉛直下方向を正の方向とする）。この時、小球 A は  $y$  方向、小球 B は  $x$  方向に運動する。

- (1) ひもの張力の大きさを  $T$  とした時、小球 A の  $y$  方向の加速度  $a_A$ 、および小球 B の  $x$  方向の加速度  $a_B$  を、 $T$ 、 $m$ 、 $g$  の内から必要な記号を用いて表しなさい。
- (2) 小球 A と B は異なる方向に運動するが、ひもは張ったままなので、その速さや加速度の大きさは等しい。 $a_A = a_B$  に注意すると、小球 A の  $y$  方向の加速度  $a_A$  は、 $g$  の何倍になるか。
- (3) 時刻  $t$  における小球 A の速さ  $v(t)$  と位置 ( $y$  座標のこと)  $y(t)$  を求めなさい。

以下では、小球 A, B とひもをまとめて「全系」と呼ぶことにする。 $y = 0$  を、小球 A, B の重力による位置エネルギーの基準とする。

- (4) 時刻  $t$  における全系の力学的エネルギー  $E(t)$  を、 $y(t)$  および  $v(t)$  を用いて表しなさい。また、この  $E(t)$  は、 $t = 0$  での全系の力学的エネルギー  $E(t = 0)$  と一致することを示しなさい。
- (5) 小球 B が机の右上端に到着する時刻  $t_1$ 、およびその時の小球 B の速さ  $v_1$  を求めなさい。

次に、小球 B が机の右上端に到着した後の運動を考えよう。時刻  $t_1$  以後も、ひもは張ったままで、小球 B も机の右上端から鉛直下方向に運動した。

- (6)  $t_1$  以後の時刻  $t$  における小球 A の位置 (つまり  $y$  座標)  $y(t)$  を、 $t$ 、 $t_1$ 、 $v_1$ 、 $l$ 、 $g$  を用いて表しなさい。

以上の結果をもとに、小球 B の固定がはずれる前 ( $t < 0$ ) から、小球 B が机の右上端を通過し鉛直下方向に運動した後まで ( $t > t_1$ ) の、小球 A の位置やひもの張力を考えよう。

- (7) 小球 A の位置  $y(t)$  を、時刻  $t$  の関数としてグラフに描きなさい。特に、時刻  $t = 0$  および  $t = t_1$  の前後における変化を説明しなさい。
- (8) 小球 B の固定が外れる前 ( $t < 0$ ) のひもの張力の大きさを  $T_0$ 、小球 B の固定が外れた後の時刻  $0 < t < t_1$ 、 $t_1 < t$  におけるひもの張力の大きさをそれぞれ  $T_1$ 、 $T_2$  とする。 $T_0$ 、 $T_1$ 、 $T_2$  を求めなさい。特に、 $T_1$ 、 $T_2$  が  $T_0$  と異なる値になる理由を説明しなさい。
- (9) 机の右上端にあるパイプが全系から受ける力の  $x$  成分  $F_x(t)$ 、 $y$  成分  $F_y(t)$  を、時刻  $t$  の関数としてグラフに描きなさい。特に、小球 B は短い時間間隔  $\Delta t$  でパイプを通過するとして、その時の力も記入すること。

**問2** 次に、ひもは細くて伸び縮みしないが、その質量が無視できない場合、問1で調べた運動がどのように変化するかを考えよう。ひもの単位長さあたりの質量(線密度)を  $\rho$  とする。また、ひもは机の上面でたわまないとする。

特に以下では、固定がはずれて小球 B が動き始めてから机の右上端に到着するまでの運動を考える。この場合も、小球 A と B の運動する方向は異なるが、ひもは張ったままなので、小球 A と B の速さや加速度の大きさは等しい。以下の問いに答えなさい。

まず、質量が無視できる場合と無視できない場合のどちらの場合に、小球 A が速く落下するかを考えよう。

- (1)  $y = 0$  を、小球 A, B およびひもの重力による位置エネルギーの基準とする。小球 A の位置が  $y = Y$  の時のひもの重力による位置エネルギーを、 $\rho, g, Y$  を用いて表しなさい。
- (2) 全系の力学的エネルギーが保存されることを用いて、小球 A が位置  $y = Y$  を通過する時の速さ  $V$  を求めなさい。
- (3) 小球 A が位置  $y = Y$  を通過する時の速さは、ひもの質量が無視できる場合と無視できない場合のどちらの場合が大きいかを説明しなさい。また、この結果から、どちらの場合に小球 A が速く落下するかを説明しなさい。

小球 A の位置  $y(t)$  を時刻  $t$  の関数として求めるためには、全系の運動方程式を考えるとよい。ひもは張ったまま運動するので、時刻  $t$  における加速度の大きさは、小球 A, B およびひものいずれの部分でも同じで、微分  $\frac{d^2}{dt^2}y(t)$  で与えられるので、全系の運動方程式は、

$$(2m + 2\rho\ell) \cdot \frac{d^2}{dt^2}y(t) = mg + \rho y(t)g \quad \dots\dots \boxtimes$$

と書くことができる。

- (4)  $\boxtimes$ 式の各項の意味を説明しなさい。
- (5)  $\boxtimes$ 式の解は、 $y(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 e^{-\lambda t} + C_3$  と書けることが知られている。ここで、 $\lambda, C_1, C_2, C_3$  は定数である。この解が任意の時刻において運動方程式を満たすことに注意して、 $\lambda$  および  $C_3$  を求めなさい。
- (6) さらに、上問(5)の解が満たすべき  $t = 0$  での小球 A の位置と速度を考えて、 $C_1$  および  $C_2$  を求めなさい。

ひもの質量が無視できない場合、ひもの張力は時刻やひもの場所に依存して変化する。時刻  $t$  における、ひもに沿って小球 A から距離  $z$  ( $0 < z < 2l$ ) 離れた位置のひもの張力の大きさを  $T(t, z)$  とする。

- (7) 上問 (5), (6) の答から時刻  $t$  における小球 A やひもの加速度が分かるので、ひもを仮想的に  $z$  の位置で切って、小球 A と  $z$  以下のひもの部分の運動方程式を考えることで、ひもの張力の大きさ  $T(t, z)$  を求めることができる。 $z < y(t)$  および  $z > y(t)$  に場合分けして、 $T(t, z)$  を求めなさい。また、この  $T(t, z)$  を位置  $z$  の関数としてグラフに描きなさい。

このグラフから、ひもの運動中に、ひものどの部分に大きな張力が働くか、その大きさは時刻  $t$  と共にどのように変化するかなどが分かることになる。

## II-B

十分に長い直線状の導線に、定常電流  $I$  を流す。これを以下では直線電流と呼ぶ。直線電流のまわりに発生する、磁場の強さ（以下、磁場と呼ぶ）について考えよう。

**問 1** まず、1本の直線電流を考えよう。直線電流は、原点  $O$  を通り、 $z$  軸の正の方向に流れている。

- (1)  $z$  軸から距離  $r$  離れた位置における磁場の大きさ  $H_1$  を、 $I$ 、 $r$  を用いて表しなさい。
- (2)  $r = 0.300 \text{ m}$ 、 $I = 4.00 \times 10^2 \text{ A}$  のときの磁場の大きさを考える。 $H_1$  の値に真空の透磁率  $\mu_0$  をかけた数値を電卓を利用して計算しなさい。ただし、 $\mu_0 = 1.257 \times 10^{-6} \text{ N/A}^2$  であり、最終的な数値の単位は、磁束密度の単位 [T] と一致する。

次に、2本の直線電流を考えよう。2本の直線電流は、 $xy$  平面の点  $A(a, 0)$ 、点  $B(-a, 0)$  ( $a > 0$ ) をそれぞれ通り、ともに  $z$  軸の正の方向に流れている。2本の直線電流によって、 $xy$  平面の点  $A$ 、 $B$  以外の点  $P(x, y)$  に作られる磁場  $H_2$  は、ベクトル  $\vec{H}_2$  を用いて表される。

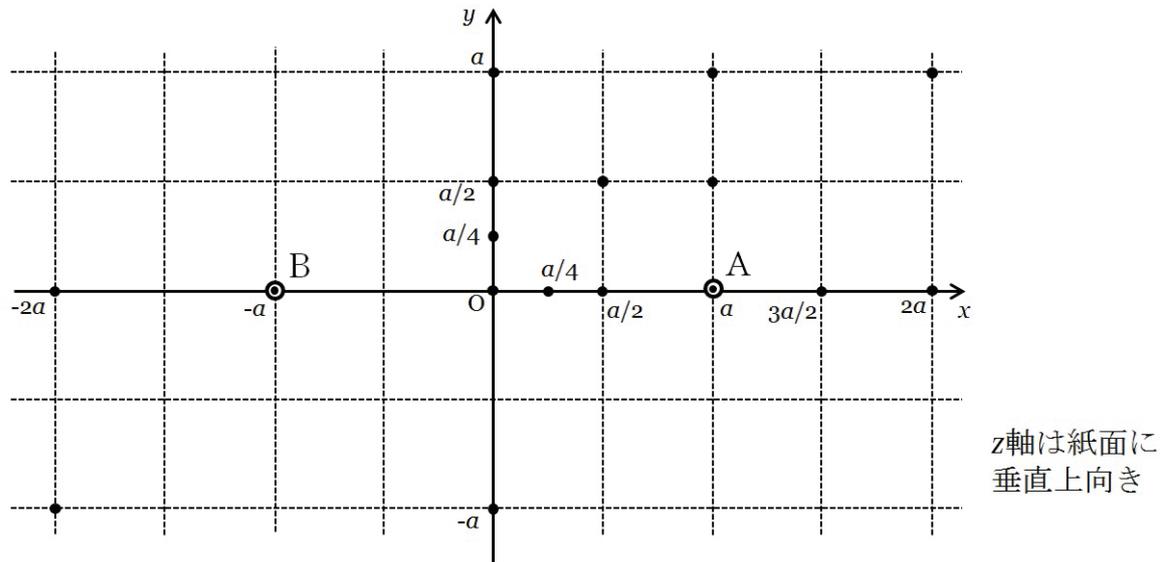


図 1：2本の直線電流による磁場 ( $z$  軸は紙面に垂直上向き)

- (3) 図 1 に指示された点  $A$ 、 $B$  以外の各点（黒丸点）における、点  $A$  を通る直線電流によって作られる磁場  $\vec{H}_{2A}$  を、向きを矢印の向きで、大きさを矢印の長さで表すことにより、専用の解答用紙（1目盛り = 2.5 cm）に図示しなさい。解答用紙には、矢印の記入例として、 $\vec{H}_{2A}$  の原点  $O$  での磁場を基準（矢印の長さ = 2.0 cm）として示してあるので、この点に関しては解答しなくてよい。また、矢印の向きや長さに、多少の誤差があってもよい。

- (4) 次に、図1に指示された点 A, B 以外の各点（黒丸点）における、点 B を通る直線電流によって作られる磁場  $\vec{H}_{2B}$  を、(3)と同様に専用の解答用紙に図示しなさい。
- (5) (3), (4)で描画した磁場  $\vec{H}_{2A}$  と  $\vec{H}_{2B}$  を、重ね合わせの原理により合成することで、2本の直線電流による磁場は、 $\vec{H}_2 = \vec{H}_{2A} + \vec{H}_{2B}$  と求めることができる。図1に指示された点 A, B 以外の各点（黒丸点）における、 $\vec{H}_2$  を、専用の解答用紙に図示しなさい。ただし、磁場がゼロとなる点に関しては矢印を示す必要はない。また、矢印の向きと長さに、多少の誤差があってもよい。必要があればトレーシングペーパーを利用してよいが、最終的な解答は解答用紙に図示しなさい。
- (6) (5)の結果を参考にして、点 A, B を通る直線電流のまわりに発生する、 $xy$  平面内における磁力線の概略を専用の解答用紙に図示しなさい。

以上により、2本の平行な直線電流による磁場の概要が理解できた。

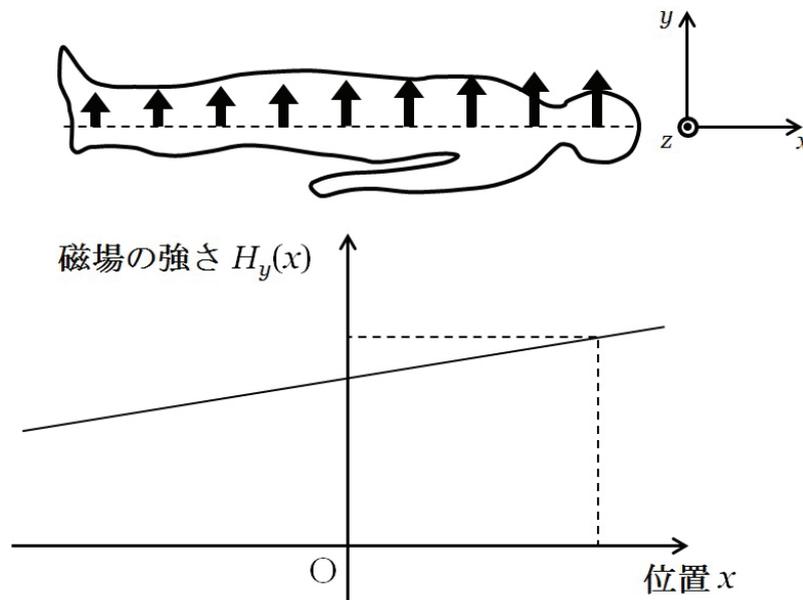


図2：MRI に用いられる一定の勾配をもつ磁場

医療の現場で利用されている磁気共鳴画像（Magnetic Resonance Imaging: MRI）においては、空間的に一定の勾配をもつ（1次関数的な）磁場（図2）と時間的に変動する交流磁場を組み合わせることで、人体の断層画像を得ている。以下では、 $x$  軸上で、磁場の  $y$  成分が一定の勾配をもつ場合を考えよう。

一定の勾配をもつ磁場とは、原点  $O$  付近で  $x$  軸上の磁場の  $y$  成分  $H_y(x)$  を、

$$H_y(x) = h_0 + h_1x + h_2x^2 + h_3x^3 + h_4x^4 + h_5x^5 + \dots \quad (h_n \text{ は定数, ただし, } n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1)$$

と表すことができ、 $h_0$  と  $h_1$  以外のすべての係数  $h_n$  がゼロになるような磁場である。しかし、これは厳密な定義であり、実際にこのような磁場を作ることは困難である。ゼロ

でない  $h_0$  の項だけの磁場を作ることと、 $h_1$  の項だけの磁場を作るとは分離して考えることができるため、以下では  $h_0 = 0$  とする。その上で、本問では、「 $H_y(x)$  が奇関数 ( $H_y(x) = -H_y(-x)$ ), すなわち  $h_{2n} = 0$ ), かつ  $h_3 = 0$ 」となる場合の磁場を実用上一定の勾配をもつ磁場とみなして、これを一定の勾配をもつ磁場と呼ぶことにする。

直線電流が1本の場合でも、2本の場合でも、装置を人体と比べて大きくして、電流間の距離を遠ざければ磁場の変化はゆるやかになるが、それだけで勾配を一定 ( $h_3 = 0$ ) にすることはできない。勾配を一定にするためには、最低4本の直線電流が必要である。そこで、次のような配置の直線電流を考えよう。

**問2** 4本の直線電流が、 $xy$  平面の点  $A(a, b)$ , 点  $B(-a, b)$ , 点  $C(a, -b)$ , 点  $D(-a, -b)$  ( $a \geq b > 0$ ) をそれぞれ通り、すべて  $z$  軸の正の方向に流れている。

- (1) 点  $A$  を通る直線電流によって、 $xy$  平面の点  $A, B, C, D$  以外の点  $P(x, y)$  に作られる磁場  $\vec{H}_A$  の  $x$  成分と  $y$  成分を、 $I, x, y, a, b$  を用いてそれぞれ表しなさい。ただし、 $\vec{H}_A$  が、ベクトル  $(x-a, y-b)$  に直交することに注意しなさい。
- (2) 4本の直線導線によって、 $xy$  平面の  $x$  軸上に作られる磁場  $\vec{H}_4$  の  $x$  成分と  $y$  成分を、 $I, x, a, b$  を用いてそれぞれ表しなさい。
- (3) (2) の  $\vec{H}_4$  の  $y$  成分を、 $H_{4y}(x)$  とする。 $H_{4y}(x)$  が奇関数であることを示しなさい。

- (4) ある変数  $\alpha$  に対して、 $|\alpha| \ll 1$  のときに成り立つ近似式
 
$$\frac{1}{1+p\alpha+\alpha^2} \simeq 1-p\alpha+(p^2-1)\alpha^2-p(p^2-2)\alpha^3 \quad (p \text{ は定数})$$
 を用いて、 $H_{4y}(x)$  について、 $|x| \ll \sqrt{a^2+b^2}$  のときの近似式を  $\frac{x}{\sqrt{a^2+b^2}}$  の3次の項まで求めなさい。ここで「 $\frac{x}{\sqrt{a^2+b^2}}$  の3次の項まで求める」とは、 $H_{4y}(x)$  の近似式を、 $\frac{x}{\sqrt{a^2+b^2}}$  の4次以上の項を無視したうえで、

$$H_{4y}(x) \simeq h'_0 + h'_1 \left( \frac{x}{\sqrt{a^2+b^2}} \right) + h'_2 \left( \frac{x}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)^2 + h'_3 \left( \frac{x}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)^3$$

の形で表し、各係数  $h'_0, h'_1, h'_2, h'_3$  を決定する、という意味である。

- (5) この電流配置において、 $|x| \ll \sqrt{a^2+b^2}$  の領域で一定の勾配を得るには、比  $a/b$  がある値と等しい必要がある。 $a \geq b$  であることと、(4) の結果を利用して、この比の値を求めなさい。
- (6)  $b = 0.300 \text{ m}$ ,  $a$  を (5) で求めた比で決めた長さとし、 $I = 4.00 \times 10^2 \text{ A}$  の電流を流したとき、 $x = b \text{ [m]}$  の位置で得られる磁場の大きさを考えよう。(2) の近似を用いない  $H_{4y}(b)$  に真空の透磁率  $\mu_0$  をかけた数値と、(5) で求めた近似式  $H_{4y}(b)$  に  $\mu_0$  をかけた数値を、ともに電卓を適宜用いて計算しなさい。

**問3** 最後に、問2とは異なる電流の向きもしくは配置で、直線電流を複数本配置して、問2と同様に、ある軸に沿って一定の勾配をもった磁場を作ることを考えよう。直線電流の本数と配置、電流の向きは自由に設定できるものとし (必ずしも本数と配置を変更する必要はない)、直線電流どうしがある一点で交わっても、それぞれの電流

は元から流れていた導線に流れ続けるものとして、目的の磁場を作るための配置を提案しなさい。例えば、問2では、 $x$ 軸方向に進むと $y$ 方向の磁場が一定の勾配をもつ場合を考えたが、 $x$ 軸方向に進んで $x$ 方向の磁場が一定の勾配をもつ場合が考えられるだろうか。解答においては、必要があればどのような配置になるか図示しなさい。また、磁場の勾配の様子がわかるように数式を用いて説明しなさい。

以上のような直線電流の配置により、空間的に一定の勾配をもつとみなせる磁場を作ることができる。本問では、単純な配置の定常電流によって一定の勾配をもつ磁場を作る方法を考えた。現実のMRIでも、本問で見てきた電流配置が用いられることがある。しかし実際には、十分に長い導線を用意することは難しいので、そのような問題を解決し、改良した導線設計による、一定の勾配をもつ磁場（勾配磁場）が利用されている。また、本問では考えなかった式(1)の $h_0$ の項に対応する空間的に一様な磁場（均一磁場）に関しては、永久磁石や超伝導線を利用したソレノイドコイルが用いられている。ソレノイドコイルによる均一磁場が数 T の大きさなのに対して、問2の最後で求めた勾配磁場の大きさは、MRIの測定が可能な範囲で十分小さいものであり、大きな均一磁場と小さな勾配磁場を組み合わせることにより、精密な磁気共鳴画像を得ている。

## II-C

4つの席がある円卓に4人の客が着席する場合の数の性質を考えてみよう。図1に示すように、4つの席に1,2,3,4と番号を付け、客をA, B, C, Dとすれば

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ A & B & C & D \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ D & A & B & C \end{bmatrix}$$

のような、座席と客の対応表ができる。しかし、図1に示すようにこの2つの配置は円卓の回転を考えると同じ配置になる。このように配置が幾何学的な構造を持つとき、1列に並べた配列の総数と異なった性質が現れる。

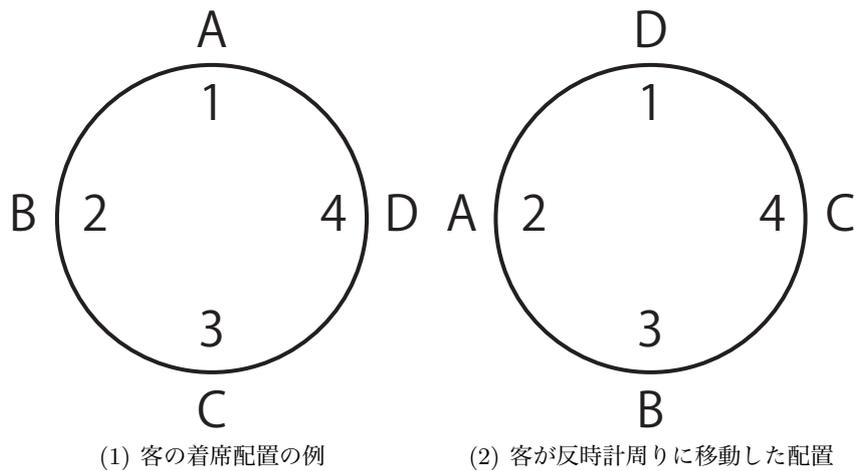


図 1: 円卓への客の配置の例

そこで、直線に並んだ順列と、円環に並んだ配置の関係を調べてみよう。円環配列の例として、数珠の玉の配置を考えることにする。

### 問 1

- 白黒2色の玉が多数混ざって入った袋から、合計4個の玉を取り出し、1列に並べる場合にできる配列の総数を求めなさい。
- 白黒2色の玉が多数混ざって入った袋から、合計4個の玉を取り出してできる数珠の玉の配置の総数を、配置を図で列挙して求めなさい。数珠の玉の配置は、数珠を裏返しても同じであることに注意しなさい。

- (c) 白 1 個, 黒 1 個, 黄 2 個, 合計 4 個の玉で数珠を作る。この数珠の配置の総数を, 配置を図で列挙することで求めなさい。
- (d) 白 1 個, 黒 1 個, 黄 1 個, 赤 1 個, 合計 4 個の玉で数珠を作る。この数珠の配置の総数と, 円卓に 4 人が席に付く配置の総数との関係を説明しなさい。

以下では, 数珠に白, 黒, 黄, 3 種類で, 合計 6 個の玉を使い, 白黒を合計 3 個しか利用しない場合の数珠の玉の配置の総数を数え上げることを考える。そのためにまず, 白, 黒, 黄, 3 種類の玉を 1 列に並べる場合の数の計算法を, 次の 2 項定理の性質を利用して求めることから始める。

## 2 項定理

$(x + y)^n$  を展開したときの  $x^k y^{n-k}$  の係数が, 黒が  $k$  個, そして残り  $(n - k)$  個の白が 1 列に並んだ配列の総数である。

2 項係数の関係を利用して次の問いに答えなさい。

## 問 2

- (a)  $(x + y + z)^n$  を展開した  $x^i y^j z^k$  ( $i + j + k = n$ ) の係数が, 黒を  $i$  個, 白を  $j$  個, 黄を  $k$  個, 合計  $n$  個の玉を 1 列に並べる場合の配列の総数であることを示しなさい。
- (b) また, その係数を  $i, j, k, n$  の式で表しなさい。

白, 黒, 黄 3 種類の玉を合計 6 個使い, 白玉と黒玉を合計 3 個しか利用しない場合の数珠の玉の配置の総数を数え上げる問題は, 次のように有機化学の問題と関係がある。

炭素 6 個と水素 6 個とからなる物質の化学式は  $C_6H_6$  である。この化学式を持つ物質としてよく知られているのはベンゼンである。ベンゼンは 6 個の炭素が平面上で正六角形になるように並び, 各頂点の炭素に水素が 1 個ずつ結合している。その状態を図 2 (1) のような記号で表現する。

さて, ベンゼンの水素は塩素原子 Cl やメチル基  $CH_3$  に置き換わることが知られている。例えば, 3 つの頂点の水素が塩素原子 Cl に置換すると化学式  $C_6H_3Cl_3$  のトリクロロベンゼンとなる。図 2(1) に示すように, 通常六角形の頂点に存在する水素は省略して表記される。

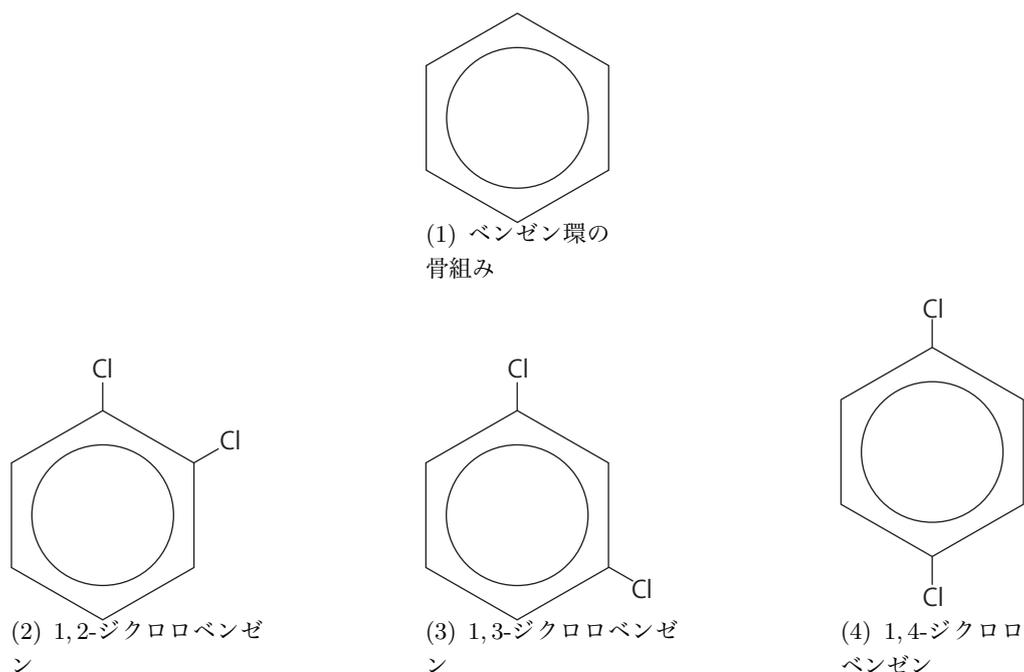


図 2: 有機物の構造:ベンゼン環の骨組みとジクロロベンゼン  $C_6H_4Cl_2$  の 3 つの構造

**問 3** 図 2 (2) (3) (4) に示すジクロロベンゼンの幾何学構造を参考に, トリクロロベンゼン  $C_6H_3Cl_3$  の全ての構造を図で列挙しなさい。

次に, ベンゼンの六角形の頂点に存在する水素 H のうち, 2 個の水素が X に置き換わり, さらに 1 個の水素が Y に置き換わった物質  $C_6H_3X_2Y$  の異なる幾何構造の個数を数え上げる手法を構成しよう。

ベンゼン環の骨組みは 3 次元空間に浮かんだ透明な板の上に描いた六角形と考えることができる。この六角形を上から見ても, 下から見ても同じ形である。上下や左右の裏返しを鏡像という。

ベンゼンの正六角形の頂点の置換を考えるために, 正六角形の頂点に付けた番号を並べ替えることを考える。正六角形の 6 つの頂点に反時計回りに番号を付ける。この図形に回転と鏡像を組み合わせて作用させ, 頂点の番号を付け替えることを考える。例えば図 3(1) の配置を反時計回りに 60 度回転すると図 3(2) の配置を得る。

これは,  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  からそれ自身への変換

$$1 \rightarrow 6, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 2, 4 \rightarrow 3, 5 \rightarrow 4, 6 \rightarrow 5$$

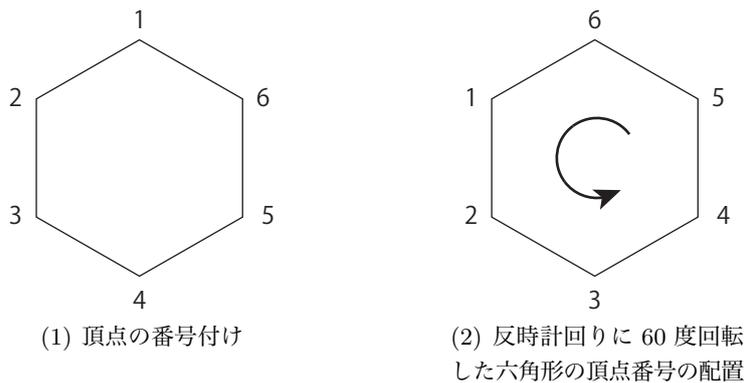


図 3: 正六角形の回転: (1) 正六角形の 6 つの頂点に反時計回りに番号を付ける。(2) 反時計回りに 60 度回転した配置を得る。

を決めたことに相当する。この変換  $\mathbf{F}_{60}$  を表を使って

$$\mathbf{F}_{60} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

と書くことにする。すなわち変換の定義域  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  を上の行に, 対応する値  $\{6, 1, 2, 3, 4, 5\}$  を下の行に記述することにする。

**問 4** 正六角形の頂点の番号を回転と鏡像だけで変換するすべての変換を表

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a & b & c & d & e & f \end{bmatrix}$$

の形式で書き下しなさい。

図 4(1) に示す変換  $\mathbf{F}_{240}$  は表

$$\mathbf{F}_{240} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

によって定義される。この変換を 3 回適用すると

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \\ 2 &\rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 2 \\ 3 &\rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \\ 4 &\rightarrow 6 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \\ 5 &\rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \\ 6 &\rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \end{aligned}$$

のように番号は次々と変換され変換を3回操作すると、図4(2)に示すように配置は元にもどる。しかも、 $\{1, 3, 5\}$ ,  $\{2, 4, 6\}$  だけで変換が閉じており、それぞれの組で対応が

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \\ 2 &\rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 2 \end{aligned}$$

のように巡回して元に戻ることがわかる。そこで、変換  $\mathbf{F}_{240}$  のこの関係を

$$(\mathbf{F}_{240}) = (135)(246)$$

と表し、変換  $\mathbf{F}_{240}$  の巡回表現と呼ぶ。

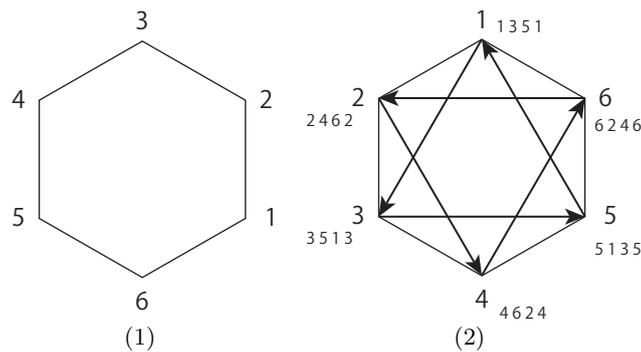


図 4: 正六角形の回転: (1) 正六角形の6つの頂点に反時計回りに番号を付ける。(2) 巡回表現  $(135)(246)$  による変換

**問 5** 問 4 で求めた表をすべて巡回表現で表しなさい。

6 個の要素に作用する変換

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & b_3 \\ a_2 & a_3 & a_1 & b_2 & b_3 & b_1 \end{bmatrix}$$

を3回作用させると

$$a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_3 \rightarrow a_1, \quad b_1 \rightarrow b_2 \rightarrow b_3 \rightarrow b_1$$

のように2つの集合  $\{a_1, a_2, a_3\}$  と集合  $\{b_1, b_2, b_3\}$  のそれぞれの中で巡回的な変換が行われている。すなわち、要素6個の集合  $\{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3\}$  が2つの閉じた巡回的な対応に分かれることが分かる。

またさらに,

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & b_1 & b_2 & c_1 & c_2 \\ a_2 & a_1 & b_2 & b_1 & c_2 & c_1 \end{bmatrix}$$

を2回作用させると

$$a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_1, \quad b_1 \rightarrow b_2 \rightarrow b_1, \quad c_1 \rightarrow c_2 \rightarrow c_1$$

の様に, 集合  $\{a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2\}$  を巡回的な変換がなされる3つの部分集合  $\{a_1, a_2\}$ ,  $\{b_1, b_2\}$ ,  $\{c_1, c_2\}$  に分割できる。従って,  $\mathbf{F}, \mathbf{G}$  の巡回表現はそれぞれ,  $(\mathbf{F}) = (a_1 a_2 a_3)(b_1 b_2 b_3)$   $(\mathbf{G}) = (a_1 a_2)(b_1 b_2)(c_1 c_2)$  となる。

巡回表現の要素の個数を考慮して, 要素の数が3個である  $(a_1 a_2 a_3)$  と  $(b_1 b_2 b_3)$  に  $f_3$  を対応させ,  $\mathbf{F}$  に  $f_3^2 = f_3 f_3$  を対応付けることにする。また, 要素の数が2個である  $(a_1 a_2)$ ,  $(b_1 b_2)$ ,  $(c_1 c_2)$  に  $f_2$  を対応させ,  $\mathbf{G}$  に  $f_2^3 = f_2 f_2 f_2$  を対応付けることにする。 $f_3^2$  や  $f_2^3$  を  $\mathbf{F}, \mathbf{G}$  の巡回数と呼ぶ。例えば,  $(1)(2)(3)(4)(5)(6)$  の巡回数は  $f_1^6 = f_1 f_1 f_1 f_1 f_1 f_1$  であり,  $(123)(456)$  の巡回数は  $f_3^2 = f_3 f_3$  である。このように変換に対応して1つの整式を決めることができる。

## 問6

- (a) 正六角形の頂点番号付替えの巡回数を  $f_k^l$  とすると  $k, l$  は  $k \times l = 6$  を満たす正の整数であることを説明しなさい。
- (b) 正六角形の頂点番号付替えの巡回数が  $f_k^l f_m^n$  となる場合に  $k, l, m, n$  の間に成り立つ関係を導きなさい。

図形の頂点番号付替えに関して, 同じ巡回数が複数あるときはその数を重みとして巡回数に掛けることにする。そして, 図形の頂点番号付替えに関する巡回数の総和を, 変換の総数で割った整式を巡回指標と呼ぶ。

正方形の頂点番号付替えについて, 巡回指標を求めてみる。正方形の回転と鏡像による頂点の番号の付け替えは, 図5に示す8種類である。図5より, 番号の付け替えの巡回表現は

$$\begin{aligned} (1)(2)(3)(4) & \quad (1)(3)(24) & \quad (12)(34) & \quad (1234) \\ & \quad (2)(4)(13) & \quad (13)(24) & \quad (1432) \\ & & \quad (14)(23) & \end{aligned}$$

の8種類である。

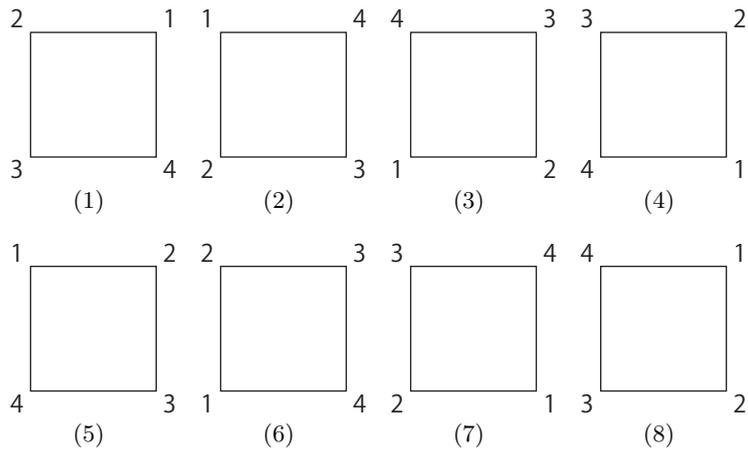


図 5: 正方形の頂点の番号の付け替え

**問 7** 正方形の頂点の番号付替えに関して,  $f_1^4$  が 1 種類,  $f_1^2 f_2$  が 2 種類,  $f_2^2$  が 3 種類,  $f_4$  が 2 種類, 合計 8 種類ある。巡回指標  $\sigma_4$  を求めなさい。

**問 8** 正六角形の頂点の番号付替えに関する並べ替えの総数を計算し, 巡回指標  $\sigma_6$  を求めなさい。

巡回指標を利用すると, 正  $n$  角形の  $n$  個の頂点に色を塗り分ける場合の数を計算できる。このことに関して以下の定理が知られている。

## 定理

正  $n$  角形の  $n$  個の頂点番号付替えに関して、巡回指標の中の  $f_k$  に  $x^k + y^k + z^k$  を代入する。そして、巡回指標を  $x, y, z$  の整式に展開する。

$i + j + k = n$  であるとき、単項式  $x^i y^j z^k$  の係数が、 $x$  色の頂点が  $i$  個、 $y$  色の頂点  $j$  個、 $z$  色の頂点が  $k$  個になる場合の数である

## 問 9

- (a)  $\sigma_4$  の  $f_k$  に  $x^k + y^k$  を代入し、

$$\sigma_4(x, y) = B_1 x^4 + B_2 x^3 y + B_3 x^2 y^2 + B_4 x y^3 + B_5 y^4 + R(x, y)$$

ただし、 $R(x, y)$  は  $x^4, x^3 y, 2x^2 y^2, x y^3, y^4$  を含まない  $x^i y^j$  ( $i + j = 4$ ) の整式とする。  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5$  を計算しなさい。

(ヒント: 2項定理を利用して必要な項だけ計算することができる。)

- (b)  $(B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5)$  の値が問 1(b) の解と一致することを説明しなさい。

- (c)  $\sigma_4$  の  $f_k$  に  $x^k + y^k + z^k$  を代入し、

$$\sigma_4(x, y, z) = C_1 x^2 y z + C_2 x y^2 z + C_3 x y z^2 + Q(x, y, z)$$

ただし、 $Q(x, y, z)$  は  $x^2 y z, x y^2 z, x y z^2$  を含まない  $x^i y^j z^k$  ( $i + j + k = 4$ ) の整式とする。  $C_1, C_2, C_3$  を計算することによって  $C_1 = C_2 = C_3$  が成立することを示しなさい。

(ヒント: 問 2(b) の結果を利用すると必要な項だけ計算することができる。)

- (d) 問 1(c) の結果を参考に、 $C_1 = C_2 = C_3$  が成立する理由を説明しなさい。

さて、正方形の場合を参考にベンゼン環の場合を計算してみよう。

## 問 10

- (a) 6 個の玉からなる数珠の 3 つの玉を無色に、それ以外の 3 玉を黒 2 個、白 1 個で塗り分ける場合の数を求めなさい。
- (b) (a) の答えがベンゼンの六角形の頂点に存在する水素 H のうち、2 個の水素が X に置き換わり、さらに 1 個の水素が Y に置き換わった物質  $C_6 H_3 X_2 Y$  の配置の総数になっていることを説明しなさい。

シクロプロパンの化学式は  $C_3H_6$  であり, 図 6(1) に示すように 3つの炭素が平面上で正三角形に配置し, 正三角形の 3つの頂点にそれぞれ水素が 2個ずつ結合している。6個の水素は正三角形柱の頂点に配置している。

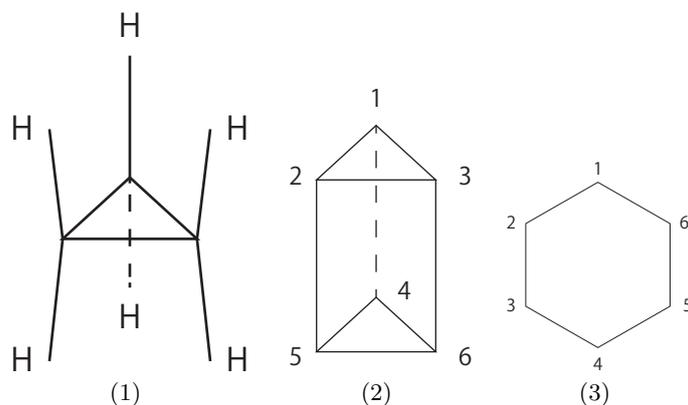


図 6: 有機物の立体構造 (1) シクロプロパンの立体構造:水素は正三角形柱の頂点に位置している。(2) 正三角柱の頂点の番号付け (3) 六角形の頂点の番号付け

シクロプロパン  $C_3H_6$  のなす正三角柱の頂点の水素を 3個を X, Y, Z 各 1個ずつで置換した物質  $C_3H_3XYZ$  の総数を計算するためには, ベンゼンの場合と同様に変換の表示を求める。次いで, 巡回表現, 巡回数, 巡回指標を順に求める。さらに, 巡回指標に  $f_k = x^k + y^k + z^k$  を代入し,  $xyz$  の項の係数を求めればよい。ベンゼンとシクロプロパンの巡回指標が一致することが知られている。このことから, 図 6 (2) (3) に示すように幾何学的な構造が異なるが, 頂点の番号の付け替えの性質が等しくなる物質が存在することがわかる。正三角柱の巡回指数は正六角形の巡回指数と等しくなり, 幾何学的な構造を区別するためには, 数え上げだけではなく物理化学的な計測が必要となる。