平成 27 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題 II-A　解答例

$\boxed{\textbf{II-A}}$

解答例

問 1 ケプラーの第 3 法則

$$\frac{T_\mathrm{P}^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_\mathrm{A}} \tag{1}$$

$$\frac{T_0^2}{a_0^3} = \frac{4\pi^2}{GM_\odot} \tag{2}$$

を利用すると，

$$M_\mathrm{A} = \left(\frac{T_0}{T_\mathrm{P}}\right)^2 \left(\frac{a}{a_0}\right)^3 M_\odot \tag{3}$$

である。従って，M_A は太陽の質量 $M_\odot$ の

$$\left(\frac{T_0}{T_\mathrm{P}}\right)^2 \left(\frac{a}{a_0}\right)^3 \text{倍} \tag{4}$$

である。遠心力が aT^{-2} に比例するのに対して重力が $M_\mathrm{A}a^{-2}$ に比例することからも同じ結論が得られる。

問 2 ケプラーの第 3 法則を利用すると

$$M_\mathrm{B} = \left(\frac{T_\mathrm{P}}{T_\mathrm{Q}}\right)^2 M_\mathrm{A} \tag{5}$$

惑星の周期は軌道離心率に依らないことを認識してもらうのが出題の意図。

問 3 惑星 P は一定の速度 $v = 2\pi a/T_\mathrm{P}$ で回転しているが，y 方向の速度は $b/a = \sqrt{1-e^2}$ 倍になり，

$$v = \frac{2\pi b}{T_\mathrm{P}} = \sqrt{1-e^2}\frac{2\pi a}{T_\mathrm{P}} \tag{6}$$

である。惑星 Q の速度は，面積速度一定の法則を使えば求まる。楕円の面積は $S = \pi ab$ であることと，点 $(x,y) = (a,0)$ での恒星 B からの距離は $a(1-e)$ であることを考えると，

$$\frac{a(1-e)v}{2} = \frac{\pi ab}{T_\mathrm{Q}} \tag{7}$$

より

$$v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\frac{2\pi a}{T_\mathrm{Q}} \tag{8}$$

問 4 惑星 P は円軌道を一定の角速度で回転しているので，$t = t_\mathrm{P} + T_\mathrm{P}/4$, $t_\mathrm{P} + T_\mathrm{P}/2$, $t_\mathrm{P} + 3T_\mathrm{P}/4$ の時刻に，それぞれ $(x, y) = (0, b)$, $(-a, 0)$, $(0, -b)$ を通過する。さらに，これらの時刻から 周期 T_P の整数倍だけ時間が経過したときにも通過する。

問 5 惑星が $(x, y) = (a, 0)$ から $(0, b)$ までの運動によりできた図形の面積 S_1 は

$$S_1 = \frac{\pi ab}{4} - \frac{(ae)b}{2} \tag{9}$$

である。従って面積速度一定の法則により，時刻

$$t_1 = t_\mathrm{Q} + \frac{S_1}{\pi ab} T_\mathrm{Q} = t_\mathrm{Q} + \left(\frac{1}{4} - \frac{e}{2\pi}\right) T_\mathrm{Q} \tag{10}$$

に $(x, y) = (0, b)$ を通過する。同様に，時刻

$$t_2 = t_\mathrm{Q} + \frac{T_\mathrm{Q}}{2}, \quad t_3 = t_\mathrm{Q} + \left(\frac{3}{4} + \frac{e}{2\pi}\right) T_\mathrm{Q} \tag{11}$$

に，それぞれ $(x, y) = (-a, 0)$, $(0, -b)$ を通過する。

問 6 速度は，恒星 B と惑星 Q の間の重力により変化するので，加速度ベクトルは惑星 Q から恒星 B への方向を向く。従って，$x = ae$ の場所で $dv_x/dt = 0$ であることが分かる。回転の向きを考えると，v_x が最大となるのは $(x, y) = (ae, -b\sqrt{1 - e^2})$ の場所である。面積速度一定の法則を使うと，

$$\frac{b\sqrt{1 - e^2} v_{x,\mathrm{max}}}{2} = \frac{\pi ab}{T_\mathrm{Q}} \tag{12}$$

なので

$$v_{x,\mathrm{max}} = \frac{2\pi a}{\sqrt{1 - e^2} T_\mathrm{Q}} \tag{13}$$

である。

表 1: 惑星 Q の速度。単位は $2\pi a/T_\mathrm{Q}$。

$(t - t_\mathrm{Q})/T_\mathrm{Q}$		v_x		v_y	
0	$= 0.000$	0	$= 0.000$	$\sqrt{3}$	$= 1.732$
$1/6 - \sqrt{3}/(8\pi)$	$= 0.098$	$-2\sqrt{3}/3$	$= -1.155$	—	—
$1/4 - 1/(4\pi)$	$= 0.170$	-1	$= -1.000$	0	$= 0.000$
$1/2$	$= 0.500$	0	$= 0.000$	$-\sqrt{3}/3$	$= -0.577$
$3/4 + 1/(4\pi)$	$= 0.830$	1	$= 1.000$	0	$= 0.000$
$5/6 + \sqrt{3}/(8\pi)$	$= 0.902$	$2\sqrt{3}/3$	$= 1.155$	—	—

問 7 設問 3, 5, 6 で求まった惑星 Q の速度は以下の表 1 のようにまとめられる。これらの点は極大と極小および 0 となる点をすべて含むので，滑らかに結ぶとグラフの概形が求められる。

なお，上記の点を滑らかにつないだグラフで十分であるが，次のような媒介変数表示を用いれば，より精密なグラフが作成できる。

$$(x, y) \quad = \quad \left(a\cos\varphi, a\sqrt{1-e^2}\sin\varphi\right) \tag{14}$$

を使うと，媒介変数が $\varphi = 0$ から φ' まで変化したとき，恒星 B と惑星 Q を結ぶ線分の描く面積は

$$S \quad = \quad \frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{2}\left(\varphi' - e\sin\varphi'\right) \tag{15}$$

である。これを利用すると

$$t \quad = \quad t_{\mathrm{Q}} + \frac{T_{\mathrm{Q}}}{2\pi}\left(\varphi - e\sin\varphi\right) \tag{16}$$

$$v_x \quad = \quad -\frac{2\pi a}{T_{\mathrm{Q}}}\sin\varphi\left(1 - e\cos\varphi\right)^{-1} \tag{17}$$

$$v_y \quad = \quad \frac{2\pi a}{T_{\mathrm{Q}}}\sqrt{1-e^2}\cos\varphi\left(1 - e\cos\varphi\right)^{-1} \tag{18}$$

である。媒介変数表示を使うと図 3 が得られる。

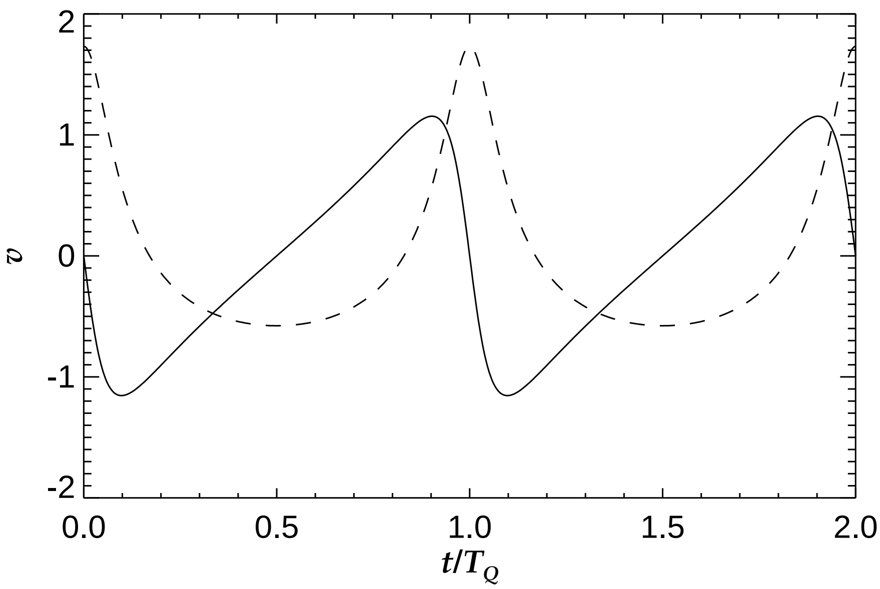

図 3: 惑星 Q の速度の時間変化。実線は v_x(短軸方向から見た場合の速度), 破線は v_y(長軸方向から見た場合の速度) を表す。

問 8 次のような特徴を記すことが期待される。

1. 惑星 Q の速度変化は単純な三角関数では表せない。
2. 速度 v_x が最大から最小に変化するのは速いが，最小から最大への変化は遅い。離心率 $e = 0.5$ の場合，前者は 周期の 20 %弱である。
3. 速度 v_y の最大値は，最小値の絶対値より大きい。
4. 速度 v_y が正である期間は，負である期間より短い。
5. 速度の絶対値で比べると最大値は $\max|v_x| > \max|v_y|$ である。

出題の意図と解説

ケプラーの法則を用いて楕円運動する惑星の速度と位置を求める問題です。問 1 と問 2 では，第 3 法則を用いると惑星の運動から恒星の質量を導けることを狙っています。問 3, 4，6，7 では幾何学の知識と第 2 法則を組み合わせて，軌道上のいくつかの点を通過する時刻とそこでの速度を求める力を試しています。第 2 法則は角運動量保存則と等価ですが，幾何学的に惑星の位置を推定することにも使えることを示した問題です。問 5 は加速度と力の関係をきちんと理解しているかどうかを問うています。問 8 は加速度変化から軌道の離心率 e が原理的に求められることを認識してもらうための問題です。問 3 から 7 は問 8 を論じるための導入にもなっていて，問 8 でグラフから特徴を読み取る力を試す問題になっています。全体として質点の力学と楕円の性質についての理解度および三角関数の演算能力を試す問題となっています。

この問題では理解しやすくするため、惑星の動きを望遠鏡で直接見ることができるとしました。しかし実際の惑星はもともと暗い上に、近くに明るい星がそばにいるため、直接その位置を測ることは困難です。昼間は太陽のために星が見えなかったり、満月の周りでは暗い星が見えづらくなるのと事情は似ています。ようやく数年前に太陽系の他の惑星のうち、親星から比較的遠いところにあるものが見つかるようになったばかりです。これらの軌道周期は 100 年よりも長いので、まだその運動を見ることはできません。

しかし 20 年前の 1995 年にスイスジュネーブ天文台のミッシェル・メイヨール（Michel Mayor）とディディエ・ケロス（Didier Queloz) はペガサス座 51 番星の周囲をわずか 4.2 日で公転する惑星を発見しました。正確に言うと、惑星本体ではなくペガサス座 51 番星が 4.2 日で私たちに近づいたり遠ざかったりするのを、光のドップラー効果を使って測定したのです。これは惑星の引力に引かれてペガサス座 51 番星も惑星と同じ周期でゆっくり回転します。惑星は軽いため、ペガサス座 51 番星のうごきはゆっくりで、この速度変化を追うためには高精度の測定が必要です。

惑星の軌道が楕円だと、問題文にあるように速度は三角関数とは違った変化を示します。この効果を使うことにより、直接は見えない惑星の軌道離心率を知ることができます。今回の問題をきっかけに、直接は見えない惑星でも、運動が楕円になっていることが検出できることを理解していただければ幸いです。