平成 27 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題 II-B　解答例

II-B 解答

光の干渉に関しては，高等学校の教科書では光路差が波長の整数倍か半整数倍かにより明るくなったり暗くなったりすると学びます。それでは、多くの光が重なり合う時はどうなるでしょうか？　その場合，単純に二つの光路の光路差だけからでは議論できません。そこで，光が電磁波であることを思い起こし，波であれば（厳密にいうと線形波であれば），重ね合わせの原理が成り立つことを用いて考えなければいけません。光は各点から伝播してきた電磁波の重ね合わせですので，それぞれの点から出てきた光を足し合わせればよいことになります。問 2 では，高校の教科書でも扱う複スリットによる回折を電磁波の重ね合わせの観点から考えてみます。そして、問 3 では、高校では扱われない単スリットによる回折を電磁波の重ね合わせの概念を用いて解いていきます。そのとき重要なのは、単スリットの場合，スリットの中の各点から伝播してきた光の重ね合わせとして考えないといけないということです。この場合，光路は無限にあるので，積分として考える必要があります。そうすると，単スリットでも光が回折されること，また，波長によって光の回折され具合が異なるので，単スリットを通った光も虹色に見えることがわかります。

問 1 (1) $c = f\lambda$，$\omega = 2\pi f$ より，$\boxed{\omega = \dfrac{2\pi c}{\lambda}}$

(2) 速度 c で進行する波と考えると

$$E = E_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{\ell}{c}\right)\right) = E_0\cos\left(\frac{2\pi c}{\lambda}\left(t-\frac{\ell}{c}\right)\right) = E_0\cos\left(\frac{2\pi c}{\lambda}t - \frac{2\pi\ell}{\lambda}\right)。$$

よって，$\boxed{k = \dfrac{2\pi}{\lambda}}$

問 2 (1) 光路差は $2\delta\sin\theta$ であるので，$2\delta\sin\theta_{\min} = \dfrac{\lambda}{2}$。これより，$\boxed{\sin\theta_{\min} = \dfrac{\lambda}{4\delta}}$

(2) 2 つのスリットからの電場を足し合わせればよいので，

$$E = E_1\cos\left(\omega t - k\left(L - \delta\sin\theta\right)\right) + E_1\cos\left(\omega t - k\left(L+\delta\sin\theta\right)\right)。$$

三角関数の和を積にする公式を用いて

$$E = 2E_1\cos\left(\omega t - kL\right)\cos\left(k\delta\sin\theta\right)$$

よって $\boxed{f(\theta) = 2E_1\cos\left(k\delta\sin\theta\right)}$

(3) $f(0) = 2E_1$ である。これより

$\boxed{F(\theta) = \cos\left(k\delta\sin\theta\right)}$

(4) 強度 I は

$$I = A\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} 4{E_1}^2\cos^2\left(\omega t - kL\right)\cos^2\left(k\delta\sin\theta\right)\mathrm{d}t = \frac{4\pi A{E_1}^2}{\omega}\cos^2\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda}\sin\theta\right)$$

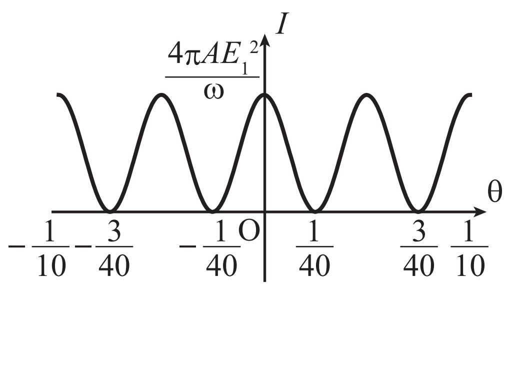
よって，$\boxed{I = \dfrac{4\pi A{E_1}^2}{\omega}\cos^2\left(k\delta\sin\theta\right)}$

参考までに，一般的には周期で割った平均をとるので、平均も示しておく．この電場の周期は $\dfrac{2\pi}{\omega}$ であるので，平均は $2A{E_1}^2\cos^2\left(k\delta\sin\theta\right)$ となる．

$\sin\theta \sim \theta$ とすると $I = \dfrac{4\pi A{E_1}^2}{\omega}\cos^2\left(k\delta\theta\right)$ となる．

$k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ より値を入れると，$I = \dfrac{4\pi A{E_1}^2}{\omega}\cos^2\left(20\pi\theta\right)$

グラフを描くと図のようになる。



問 3 **(1)** 問 1 と同様に考えると，$\boxed{E = E_1 \cos(\omega t - k(L - b\sin\theta))}$

(2) 題意より比例定数を E_2 とすると

$$
\begin{aligned}
E'(\theta) &= \int_{-a}^{a} E_2 \cos(\omega t - k(L - b\sin\theta))\,\mathrm{d}b \\
&= \frac{E_2}{k\sin\theta}\left[\sin(\omega t - k(L - b\sin\theta))\right]_{b=-a}^{b=a} \\
&= \frac{E_2}{k\sin\theta}\left[\sin(\omega t - k(L - a\sin\theta)) - \sin(\omega t - k(L + a\sin\theta))\right] \\
&= \frac{E_2}{k\sin\theta}\cos(\omega t - kL)\sin(ka\sin\theta)
\end{aligned}
$$

よって，$g(\theta) = \dfrac{E_2}{k\sin\theta}\sin(ka\sin\theta)$。

ここで、$g(0) = \lim_{\theta\to 0} g(\theta) = \lim_{\theta\to 0} \dfrac{E_2}{k}\dfrac{ka\sin\theta}{\sin\theta}\dfrac{\sin(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta} = E_2 a$ よって、

$$\boxed{G(\theta) = \frac{\sin(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta}}$$

(3) 強度 I は

$$
\begin{aligned}
I =& B\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \left(\frac{E_1}{k\sin\theta}\right)^2 \cos^2(\omega t - kL)\sin^2(ka\sin\theta)\,\mathrm{d}t \\
=& \frac{\pi B}{\omega}\left(\frac{E_1}{k\sin\theta}\right)^2 \sin^2(ka\sin\theta)
\end{aligned}
$$

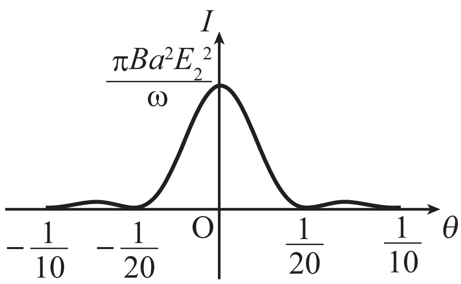
よって，$\boxed{I = \dfrac{\pi B}{\omega}\left(\dfrac{E_1}{k\sin\theta}\right)^2 \sin^2(ka\sin\theta)}$

問 2 と同様に平均をとると，周期は $\dfrac{2\pi}{\omega}$ であるので，平均は $\dfrac{B}{2}\left(\dfrac{E_1}{k\sin\theta}\right)^2 \sin^2(ka\sin\theta)$

$\sin\theta \sim \theta$ とすると，$I = \dfrac{\pi B}{\omega}\left(\dfrac{E_1}{k\theta}\right)^2 \sin^2(ka\theta)$ となる．

値を入れると，$I = \dfrac{\pi B a^2 {E_2}^2}{\omega}\left(\dfrac{1}{20\pi\theta}\right)^2 \sin^2(20\pi\theta)$

グラフを描くと図のようになる。



(4) **(3)** のグラフより暗線に相当する角は波長が長いほど外側に来る。つまり、波長が長くなればなるほど外側に回折するようになる。これを考慮すると、波長が長い赤色の光は外側に、波長の短い紫色の光は内側に見えるはずである。よって、中央の光はほぼ白色のままだが、回折した光は虹色に見えて外側が赤色、内側が紫色に見えると考えられる。