平成 27 年度

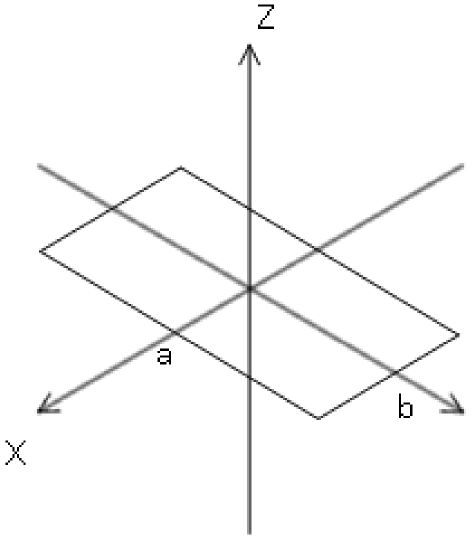
千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題 II-C　解答例

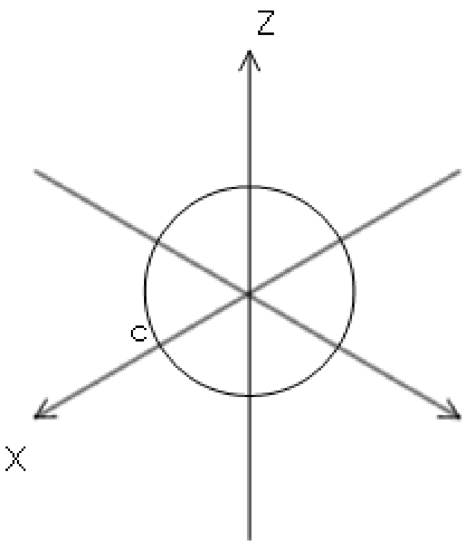
II-C

解答例

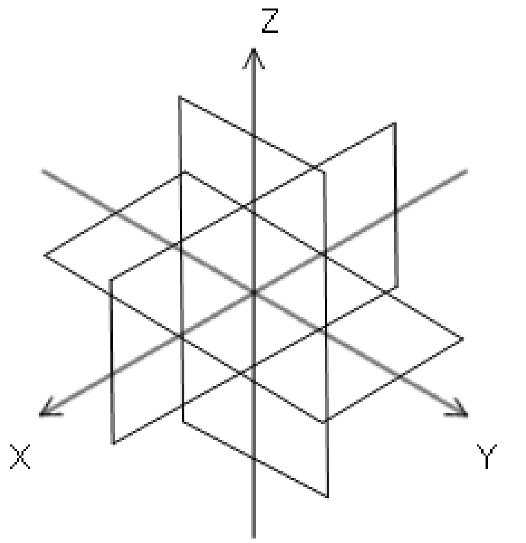
問１ 以下のような図が書かれていれば正解。（短辺長辺の向きが逆の場合この問題では 1/2 部分点を与える。）



問２　円が描かれていれば正解



問３ 次のような図が書かれていれば正解。（もとの長方形の記入の有無は採点対象外。問１で長短の向きが異なっている場合を引き継いだ場合は減点しない。）



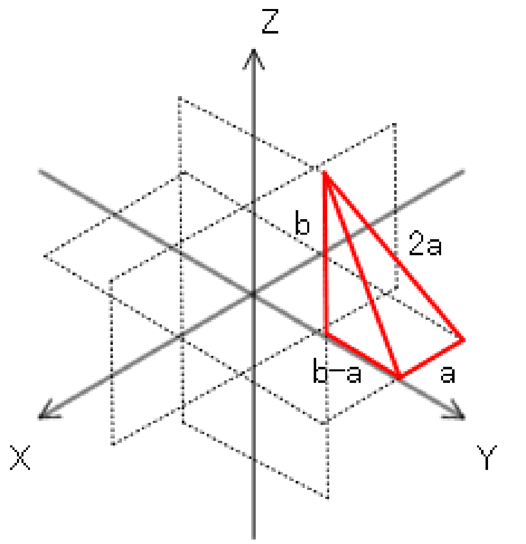
問４ 24 本 （$12 \times 4 \div 2 = 24$）

問５ 20 面（図から数えられる）

あるいは，オイラーの多面体公式をつかう。頂点の数 12，辺の数 $30(24+6)$ から，面の数 n は

$$12 - 30 + n = 2$$

を満たす。



問６ 上図で

$$b^2 + (b-a)^2 = (2a)^2 - a^2$$

この式を変形すると

$$b^2 - ab - a^2 = 0$$

となり，

$$x = \frac{b}{a}$$

とすると

$$x^2 - x - 1 = 0$$

これを解いて

$$x = \frac{b}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

（$\frac{b}{a} > 0$ なので，$1 \pm \sqrt{5}$ とした場合は減点。）

問７　正五角錐の高さを求める。正五角形の一辺の長さと対角線の長さの比は問６で求めた値（黄金比）になっている。これを用いた解答例を示す。

底面の正五角形の一辺の長さを l（$= \frac{2a}{3}$），問６で求めた（黄金）比を g とすると，底面の外接円の半径 r について，以下の方程式が得られる。

$$l^2 = r^2 + r^2 - 2rr\cos\theta$$

$$(gl)^2 = r^2 + r^2 - 2rr\cos 2\theta$$

ここで

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

を利用して，正五角錐の高さ h について解くと，

$$h = \sqrt{l^2 - r^2} = \frac{2}{3}a\sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{10-2\sqrt{5}}}$$

（a の位置は前後にズレていても減点しない。二重根号部分を整理した場合，解答例と異なる可能性があるが，その値を計算したとき 0.525731112（以下省略）になるはずなので，一致するならもちろん正解。可能性としては

$$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}a$$

などが考えられる。）

問８ 32 面（12 個の頂点を切り落とすことで新たに 12 面増える。$20 + 12 = 32$）。

問９サッカーボール　（ボール，でも正解）。あるいはフラードームやレーダードームなど、建築物の屋根を答えてもよい。

出題意図

空間認識能力の高い学生を選抜できればと思い作問しました。問１，問２では，座標系を $(1,1,1) \to (0,0,0)$ でみたぐらいに初めから用意してあげる（解答用紙にあらかじめ書いておく）と正解が得られやすいと思います。

問７では，内分点を結んでできる面が正五角形であることを答えさせないまま，正五角錐の高さを要求しています。まず正五角形であることに気付くことが大切です。

正五角形の１辺の長さと対角線の長さの比が黄金比になっていることは，飛び入学を目指す学生なら知っていておかしくないでしょうし，また，試験中に閲覧可能な資料から得られると想定しています。仮に，いずれでもない場合でも，枝問の流れから「カン」で気づいて欲しいところですし，先進科学プログラムとしてはそういう勘の良い学生を採用したいと思います。