平成 27 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

数学　解答例

$\boxed{\text{数学}}$

解答例

問 1 （1）$t^2-2t+1=0$ （2）$x=1\pm\sqrt{2}$（それぞれ重解）

問 2 （1）$f'(x)=3x^2-2ax=0$ より，$x=0,\frac{2}{3}a$ である。したがって，$x=\frac{2}{3}a$ となる。

（2）

$$\int_0^a |x^3-ax^2|dx=\left[\frac{ax^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^a=\frac{a^4}{12}$$

問 3 $(1+\sqrt{3}i)^3=1+3\sqrt{3}i-9-3\sqrt{3}i=-8$ であるから，$(1+\sqrt{3}i)^6=(-8)^2=64$ となる。別解答として，ド・モアブルの定理を用いると次のように計算できる。

$$\left(1+\sqrt{3}i\right)^6=2^6\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6=2^6\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^6=2^6(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=2^6=64$$

問 4

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{2+5}{1-2\cdot 5}=-\frac{7}{9}$$

より，

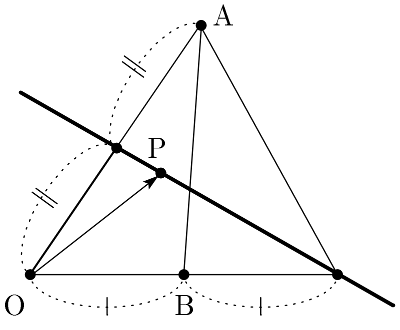
$$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan\gamma}{1-\tan(\alpha+\beta)\tan\gamma}=\frac{-\frac{7}{9}+8}{1-(-\frac{7}{9})\cdot 8}=1$$

ここで，$\sqrt{3}<\tan\alpha<\tan\beta<\tan\gamma$ より，$\frac{\pi}{3}<\alpha<\beta<\gamma<\frac{\pi}{2}$ となるから，$\frac{\pi}{3}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{3}<\beta<\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{3}<\gamma<\frac{\pi}{2}$ の辺々を加えて，$\pi<\alpha+\beta+\gamma<\frac{3}{2}\pi$ となる。よって，

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{5}{4}\pi$$

問 5 コインを 3 回投げた結果の総数は $2^3=8$ 通りで，そのうち 2 だけ進む（表が 2 回出る）場合の数は，${}_3\mathrm{C}_2=3$ 通りある。よって，確率は $\frac{3}{8}$ となる。

問 6 （1）$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2s(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\frac{1}{2}t(2\overrightarrow{\mathrm{OB}})$ で，$2s+\frac{1}{2}=1$ であるから，点 P は $\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $2\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を通る直線上を動く。



（2）$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=s^2|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+2st\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=4s^2+2st+t^2=12s^2-12s+4=12(s-\frac{1}{2})^2+1$ より，$s=\frac{1}{2}$ のときに最小になり，最小値は 1 である。