平成２８年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題 Ⅰ

解答例

解答例 [I]

$\boxed{1}$

(A-1) つりあいの状態にあるとき，小球にはたらくばねの弾性力と重力は等しいので，ばねののび $\Delta\ell$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} mg - k\Delta\ell &= 0 \\ \Delta\ell &= \frac{mg}{k} \end{aligned} \tag{1}$$

ばねの自然長の位置を基準とした重力の位置エネルギー $(-mg\Delta\ell)$ とばねの位置エネルギー $\left(\frac{k}{2}\Delta\ell^2\right)$ の和 U_0 は,

$$U_0 = -mg\Delta\ell + \frac{k}{2}\Delta\ell^2 \tag{2}$$

となる。

(A-2) 小球の運動エネルギーは,

$$T = \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{m}{2}A^2\omega^2\sin^2\omega t \tag{3}$$

となる。また，重力の位置エネルギーとばねの位置エネルギーの和は,

$$\begin{aligned} U &= -mg(\Delta\ell + A\cos\omega t) + \frac{k}{2}(\Delta\ell + A\cos\omega t)^2 \\ &= -mg\Delta\ell - mgA\cos\omega t + \frac{k}{2}\Delta\ell^2 + \Delta\ell kA\cos\omega t + \frac{k}{2}A^2\cos^2\omega t \\ &= U_0 + \frac{k}{2}A^2\cos^2\omega t, -mgA\cos\omega t + \Delta\ell kA\cos\omega t \\ &= U_0 + \frac{k}{2}A^2\cos^2\omega t \end{aligned} \tag{4}$$

となる。

(A-3) 力学的エネルギー は,

$$E = T + U = \frac{m}{2}A^2\omega^2\sin^2\omega t + U_0 + \frac{k}{2}A^2\cos^2\omega t$$

となる。力学的エネルギーが保存することから，任意の時刻において，力学的エネルギーの時間変化が 0 になることを用いると，

$$\frac{dE}{dt} = mA^2\omega^3 \sin\omega t \cos\omega t - kA^2\omega \cos\omega t \sin\omega t = 0$$

$$\begin{aligned} m\omega^2 &= k \\ \omega &= \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_a \end{aligned} \tag{5}$$

となる。

(B-1) 小球の位置とその時間変化は，

$$x = \ell_1 \cos\theta, \quad y = \ell_1 \sin\theta \tag{6}$$

$$\frac{dx}{dt} = -\ell_1 \frac{d\theta}{dt} \sin\theta, \quad \frac{dy}{dt} = \ell_1 \frac{d\theta}{dt} \cos\theta \tag{7}$$

となる。また小球の運動エネルギーは，

$$T = \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{m}{2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{m}{2}\ell_1^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \tag{8}$$

となり，小球が静止しているときを基準とした重力の位置エネルギーは，

$$U = mg\ell_1(1 - \cos\theta) \tag{9}$$

となる。

(B-2) 任意の時刻において，力学的エネルギーの時間変化が 0 になることを用いると，

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2}\ell_1^2 \left(B\omega_b \sin\omega_b t\right)^2 \\ U &\approx mg\ell_1\left(1 - 1 + \frac{\theta^2}{2}\right) = \frac{m}{2}g\ell_1\theta^2 = \frac{m}{2}g\ell_1(B\cos\omega_b t)^2 \\ E &= T + U = \frac{m}{2}\ell_1^2\left(B\omega_b \sin\omega_b t\right)^2 + \frac{m}{2}g\ell_1(B\cos\omega_b t)^2. \\ \frac{dE}{dt} &= m\ell_1^2 B^2\omega_b^3 \sin\omega_b t \cos\omega_b t - mg\ell_1 B^2\omega_b \cos\omega_b t \sin\omega_b t \\ &= \left(\ell_1\omega_b^2 - g\right) m\ell_1 B^2\omega_b \sin\omega_b t \cos\omega_b t = 0 \\ \omega_b &= \sqrt{\frac{g}{\ell_1}} \end{aligned} \tag{10}$$

となる。

(C-1) 小球の位置とその時間変化は,

$$
\begin{aligned}
x &= \ell\cos\theta, \quad y = \ell\sin\theta && (11)\\
\frac{dx}{dt} &= \frac{d\ell}{dt}\cos\theta - \ell\frac{d\theta}{dt}\sin\theta, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{d\ell}{dt}\sin\theta + \ell\frac{d\theta}{dt}\cos\theta && (12)
\end{aligned}
$$

となる。また小球の運動エネルギーは,

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\\
&= \frac{m}{2}\left[\left(\frac{d\ell}{dt}\right)^2 + \ell^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] && (13)
\end{aligned}
$$

となり，小球が静止しているときを基準とした重力の位置エネルギーは,

$$
U = mg(\ell_0 - \ell\cos\theta) + \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 \qquad (14)
$$

となる。

(C-2) ばねの長さ ℓ と角度 θ がそれぞれ，$\ell = \ell_1 + A\cos\omega_a t, \theta = B\sin\omega_b t$，かつ $\omega_a \neq \omega_b$ であるとき，任意の時刻において，力学的エネルギーの時

間変化が 0 になることを用いると，

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{m}{2}A^2\omega_a^2\sin^2\omega_a t + \frac{m}{2}(\ell_1 + A\cos\omega_a t)^2 B^2\omega_b^2\cos^2\omega_b t \\
&\approx \frac{m}{2}A^2\omega_a^2\sin^2\omega_a t + \frac{m}{2}\ell_1^2 B^2\omega_b^2\cos^2\omega_b t \\
\frac{dT}{dt} &= mA^2\omega_a^3\sin\omega_a t\cos\omega_a t - m\ell_1^2 B^2\omega_b^3\cos\omega_b t\sin\omega_b t \\
U &\approx mg\left[\ell_0 - (\ell_0 + \Delta\ell + A\cos\omega_a t)\left(1 - \frac{B^2\sin^2\omega_b t}{2}\right)\right] \\
&\quad + \frac{k}{2}(\ell_0 + \Delta\ell + A\cos\omega_a t - \ell_0)^2 \\
&\approx mg\left[-\Delta\ell - A\cos\omega_a t + \frac{\ell_1}{2}B^2\sin^2\omega_b t\right] + \frac{k}{2}(\Delta\ell + A\cos\omega_a t)^2 \\
&= -mg\Delta\ell + \frac{1}{2}k\Delta\ell^2 + (-mg + k\Delta\ell)A\cos\omega_a t \\
&\quad + \frac{m}{2}g\ell_1 B^2\sin^2\omega_b t + \frac{k}{2}A^2\cos^2\omega_a t \\
&= -mg\Delta\ell + \frac{k}{2}\Delta\ell^2 + \frac{m}{2}g\ell_1 B^2\sin^2\omega_b t + \frac{k}{2}A^2\cos^2\omega_a t \\
\frac{dU}{dt} &= mg\ell_1 B^2\omega_b\sin\omega_b t\cos\omega_b t - kA^2\omega_a\cos\omega_a t\sin\omega_a t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
mA^2\omega_a^3 &= kA^2\omega_a \\
\omega_a &= \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (15) \\
m\ell_1^2 B^2\omega_b^3 &= mg\ell_1 B^2\omega_b \\
\omega_b &= \sqrt{\frac{g}{\ell_1}} \qquad (16)
\end{aligned}
$$

となる。

(C-3) 小球は r 方向と θ 方向にそれぞれ単振動しており，小球の軌跡は図 A1 の左図のようになる。$|\theta|$，$|x|$，$\left|\frac{d\theta}{dt}\right|$ が十分小さく，3 次以上の項を無視できるとすれば（加速度や遠心力が小さい），それぞれの方向に対して独立した運動となる。r 方向の運動の周期は $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$，θ 方向の運動の

周期は $2\pi\sqrt{\dfrac{\ell_1}{g}}$ となる。また実際の実験でこの近似を成立させるためには，ばね定数を十分大きくすることにより変位 ℓ を小さくさせる，ばねの自然長 ℓ_0 を長くし角速度を遅くさせるなど工夫する必要がある。また図 A1 の右図は，$\omega_a \gg \omega_b \left(\dfrac{k}{m} \gg \dfrac{g}{l_1}\right)$ の場合の軌跡の様子である。

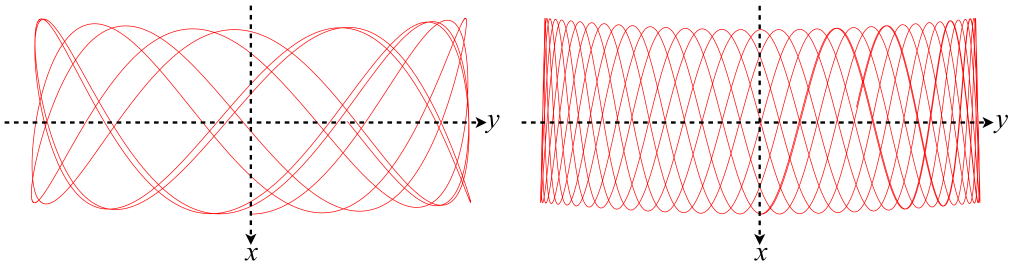

図 A1：小球の軌跡。図中の x 軸と y 軸の交点 (原点) はつりあいの位置を表す。（左図）ω_a と ω_b の値が近い時の軌跡。（右図）$\omega_a \gg \omega_b$ の時の軌跡。

$\boxed{2}$

(A) 左右のばねののびを Δx とし，問 $\boxed{1}$ を参考にすると，

$$\begin{aligned}
U &= \frac{k}{2}\left[(\Delta x+\ell_1-\ell_0)^2+(\Delta x+\ell_1-\ell_0)^2\right]-3mg(\Delta x+\ell_1-\ell_0) \\
&= k\left[\Delta x^2+2\Delta x(\ell_1-\ell_0)+(\ell_1-\ell_0)^2\right]-3mg(\Delta x+\ell_1-\ell_0) \\
&= k\Delta x^2+\left(-3mg+2k(\ell_1-\ell_0)\right)\Delta x+k(\ell_1-\ell_0)^2-3mg(\ell_1-\ell_0) \\
&= k\Delta x^2+k(\ell_1-\ell_0)^2-3mg(\ell_1-\ell_0) \\
T &= \frac{3m}{2}\left(\frac{d\Delta x}{dt}\right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k &= \frac{3m}{2}\omega^2 \\
\omega &= \sqrt{\frac{2k}{3m}} \qquad (17) \\
f_v &= \frac{\omega}{2\pi}=\frac{\sqrt{\frac{3.0\times10^3}{3.0\times10^3}}}{2\pi}\ [\mathrm{Hz}]\approx 0.16\ [\mathrm{Hz}] \\
&= 9.5\ [\mathrm{min}^{-1}] \\
T_v &= 6.3\ [\mathrm{s}] \qquad (18)
\end{aligned}$$

となる。ここで f_v と T_v はそれぞれ振動数と振動周期を表す。

(B) 振り子のような運動をすると考え，問$\boxed{1}$を参考にすると，

$$
\begin{aligned}
U &= \frac{k}{2}\left[(\ell_1-\ell_0)^2+(\ell_1-\ell_0)^2\right]+3mg(\ell_0-\ell_1\cos\theta) \\
&\approx k(\ell_1-\ell_0)^2+3mg\left(\ell_0-\ell_1+\frac{\ell_1\theta^2}{2}\right) \\
T &= \frac{3m}{2}\ell_1^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \\
\frac{3}{2}mg\ell_1 &= \frac{3}{2}\omega^2 m\ell_1^2 \\
\omega &= \sqrt{\frac{g}{\ell_1}} \qquad (19) \\
f &= \frac{\sqrt{\dfrac{9.8}{50}}}{2\pi}\,[\mathrm{Hz}] \approx 0.070\,[\mathrm{Hz}] \\
&= 4.2\,[\mathrm{min}^{-1}] \\
T &= 14\,[\mathrm{s}] \qquad (20)
\end{aligned}
$$

となる。ここで f と T はそれぞれ振動数と振動周期を表す。

(C-1) 左右の小球の座標は図 A2 に示す。また，$\Delta\ell_{_L} = \Delta\ell_{-}$，$\Delta\ell_{_R} = \Delta\ell_{+}$ とおくと，

$$\Delta\ell_{\pm} \;=\; \sqrt{\left(\ell_1 \mp \frac{L}{2}\sin\phi\right)^2 + \left(\pm\frac{L}{2} \mp \frac{L}{2}\cos\phi\right)^2} - \ell_1 \qquad (21)$$

となる。

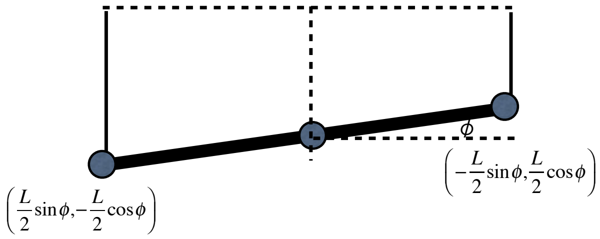

図 A2

(C-2)

$$\begin{aligned}
\Delta\ell_{\pm} &\approx \sqrt{\left(\ell_1 \mp \frac{L}{2}\phi\right)^2 + \left(\pm\frac{L}{4}\phi^2\right)^2} - \ell_1 \\
&\approx \sqrt{\ell_1^2 \mp \ell_1 L\phi + \frac{L^2}{4}\phi^2} - \ell_1 \\
&= \ell_1\sqrt{1 \mp \frac{L}{\ell_1}\phi + \frac{1}{\ell_1^2}\frac{L^2}{4}\phi^2} - \ell_1 \\
&\approx \ell_1\left[1 + \frac{1}{2}\left(\mp\frac{L}{\ell_1}\phi + \frac{1}{\ell_1^2}\frac{L^2}{4}\phi^2\right) - \frac{1}{8}\left(\mp\frac{L}{\ell_1}\phi + \frac{1}{\ell_1^2}\frac{L^2}{4}\phi^2\right)^2\right] - \ell_1 \\
&\approx \mp\frac{L}{2}\phi + \frac{1}{\ell_1}\frac{L^2}{8}\phi^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{L^2}{\ell_1}\phi^2\right) \\
&\approx \mp\frac{L}{2}\phi \qquad (22)
\end{aligned}$$

(C-3) この場合の運動エネルギー，および重力の位置エネルギーとばねの位

置エネルギーの和を求め，問$\boxed{1}$を参考にすると，

$$
\begin{aligned}
U &\approx \frac{k}{2}\left[\left(-\frac{L}{2}\phi+\ell_1-\ell_0\right)^2+\left(\frac{L}{2}\phi+\ell_1-\ell_0\right)^2\right] \\
&= \frac{k}{2}\left[2\left(\frac{L}{2}\phi\right)^2+2(\ell_1-\ell_0)^2\right] \\
&= k\left(\frac{L}{2}\right)^2\phi^2+k(\ell_1-\ell_0)^2 \\
T &= 2\times\frac{m}{2}\left(\frac{L}{2}\right)^2\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k\left(\frac{L}{2}\right)^2 &= \omega^2 m\left(\frac{L}{2}\right)^2 \\
\omega &= \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (23) \\
f_t &= \frac{\sqrt{\frac{1.5\times10^3}{1.0\times10^3}}}{2\pi}\,[\mathrm{Hz}] \approx 0.19\,[\mathrm{Hz}] \\
&= 12\,[\mathrm{min}^{-1}] \\
T_t &= 5.1\,[\mathrm{s}] \qquad (24)
\end{aligned}
$$

となる。ここで f_t と T_t はそれぞれ振動数と振動周期を表す。