平成 30 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題 II

解答例

解答例：課題II

出題意図

設問を通じて，マクロな物理現象をミクロな視点から理解することを目的とし，光の反射・屈折現象を題材に問題を作成した。分野としては光の性質，熱力学，電磁気と幅広く，融合問題となっている。

問 1 では光の全反射によるマクロな物理現象として逃げ水を取り上げている。問題を通じて，屈折率は温度によって決まる物理量であるということを学ぶ。

問 2 では実際に気体の屈折率を測定する際に用いられている干渉計での実験を通じて，どの物理量が気体の屈折率を決定しているのかを理解してもらうことを目的としている。光の干渉と熱力学との融合問題である。

問 3 では屈折率をミクロな視点から捉えることを目指している。高校では光のもつ振動数 (周波数) によって屈折率が異なる (光の分散) ことを学ぶ。この周波数依存性を解釈するためには，気体の分子レベルでの性質を考慮する必要がある。その際に誘電率を理解することが必要不可欠となる。物質に電場を印加すると，物質内部の電荷分布に変化が生じ，電気双極子モーメントが誘起され，それにより逆向きの電場が形成される。単位体積当たりの電気双極子モーメントが分極であり，この分極と電場とを結び付けているのが誘電率である。分極の機構には大きく 3 つ (配向分極，イオン分極，電子分極) あるが，今回の問題では光を取り扱っていることから，高い振動数に追随することが可能な電子分極の寄与のみを考えている。古典的な振動子モデルを考え，運動方程式を解くことにより，屈折率が気体の個数密度にのみ依存していることを導かせる。問題を通じて，マクロな物理現象として屈折率を捉えた場合の問 2 と同じ関係が得られることを学ばせることを目的としている。

高校ではあまり取り扱わない誘電率を主体としているため，問 3 は概念を理解することに多少時間がかかるかもしれないが，設問自体は高校範囲の数学，物理を理解していれば解ける問題である。三角関数の計算などでは電卓を使用してよいため，計算力や暗記力を問う問題ではない。

問 1 (1) $n_\mathrm{L}\sin\theta = n_\mathrm{H}\sin\phi$

(2) 全反射が起きる際には $n_\mathrm{L}\sin\theta_\mathrm{c} = n_\mathrm{H}$
$\sin\theta_\mathrm{c} = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \beta_\mathrm{c}\right) = \cos\beta_\mathrm{c}$ であるので $n_\mathrm{L}\cos\beta_\mathrm{c} = n_\mathrm{H}$
よって

$$\beta_\mathrm{c} = \sqrt{2 - 2\cos\beta_\mathrm{c}} = \sqrt{2\left(1 - \frac{n_\mathrm{H}}{n_\mathrm{L}}\right)}$$

(3) 式 (1) より $\dfrac{n_\mathrm{H} - 1}{n_\mathrm{L} - 1} = \dfrac{T_\mathrm{L}}{T_\mathrm{H}}$
したがって，$1 - \dfrac{n_\mathrm{H}}{n_\mathrm{L}} = 1 - \dfrac{1}{n_\mathrm{L}}\left\{1 + \dfrac{T_\mathrm{L}}{T_\mathrm{H}}(n_\mathrm{L} - 1)\right\} = \left(1 - \dfrac{1}{n_\mathrm{L}}\right)\left(1 - \dfrac{T_\mathrm{L}}{T_\mathrm{H}}\right)$
よって

$$\beta_\mathrm{c} = \sqrt{2\left(1 - \frac{1}{n_\mathrm{L}}\right)\left(1 - \frac{T_\mathrm{L}}{T_\mathrm{H}}\right)}$$

(4) 代入すると $\beta_\mathrm{c} = 5.434 \times 10^{-3}$
よって $1.5/\tan(5.434 \times 10^{-3}) = 276.0$
2.8×10^2 m 離れたところに見える。

問 2 (1) 屈折の法則より，平面鏡での屈折角度を r とすると

$$\begin{aligned} \sin\frac{\pi}{4} &= n_\mathrm{P}\sin r \\ \sin r &= \frac{1}{\sqrt{2}n_\mathrm{P}} \end{aligned}$$

光路長は $\dfrac{2dn_\mathrm{P}}{\cos r}$ より求められるので，$\cos r = \sqrt{1 - \dfrac{1}{2n_\mathrm{P}^2}}$ を代入することにより

$$\frac{2\sqrt{2}dn_\mathrm{P}^2}{\sqrt{2n_\mathrm{P}^2 - 1}}$$

とわかる。

(2) 光の強度は気体を入れ始めると弱くなり，その後明暗を繰り返す。

(3) 強めあうとき，光路差が波長の整数倍である。光路差は容器 A_1 と A_2 内部の屈

折率の違いによるので

$$\begin{aligned} \ell(n_0-1) &= N\lambda \\ n_0 &= 1+\frac{\lambda}{\ell}N \end{aligned}$$

(4) $T=299$ K，$p=1.010\times10^5$ のときの屈折率を n_1，　$T=299$ K，$p=6.99\times10^4$ のときの屈折率を n_2 とすると，屈折率の違いにより生じる光路差は $(n_1-n_2)\ell$ と表せる。
式 (1) より

$$(n_1-n_2)\ell=\{(n_1-1)-(n_2-1)\}\ell=\frac{1.010\times10^5-6.99\times10^4}{299}\alpha\ell$$

光が強めあう条件を考えることにより

$$\begin{aligned} \frac{1.010\times10^5-6.99\times10^4}{299}\alpha\ell &= 75\times(6.33\times10^{-7}) \\ \alpha &= 3.043\times10^{-6} \end{aligned}$$

よって

$$n-1=3.043\times10^{-6}\times\frac{1.01\times10^5}{273}$$

$n=1.0011257\fallingdotseq1.00113$

(5) 状態方程式より $\dfrac{p}{T}=\rho k_{\mathrm{B}}$ であるので式 (1) に代入すると $n-1=\alpha k_{\mathrm{B}}\rho$ とわかる。

問 3 (1) $m\dfrac{d^2x}{dt^2}+kx=-eE$ もしくは $m\dfrac{d^2x}{dt^2}+kx=-eE_0\cos\omega t$

(2) 運動方程式に代入すると

$$\begin{aligned} -mx_0\omega^2\cos\omega t+kx_0\cos\omega t &= -eE_0\cos\omega t \\ mx_0\left(\frac{k}{m}-\omega^2\right) &= -eE_0 \\ x_0 &= \frac{-eE_0}{k-m\omega^2} \end{aligned}$$

(3)

$$P = -\rho ex_0\cos\omega t=\frac{\rho e^2E_0}{k-m\omega^2}\cos\omega t$$

(4) 前問 (3) と式 (8) より

$$P = -\rho e x = (\varepsilon - \varepsilon_0)E$$

であるので，代入すると

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = \frac{\rho e^2}{k - m\omega^2}$$

式 (6) より

$$n^2 - 1 = \frac{\rho e^2}{\varepsilon_0(k - m\omega^2)}$$

と求まる。近似式より

$$\begin{aligned} n - 1 &\fallingdotseq \frac{n^2 - 1}{2} = \frac{\rho e^2}{2\varepsilon_0(k - m\omega^2)} \\ n &= 1 + \frac{\rho e^2}{2\varepsilon_0(k - m\omega^2)} \end{aligned}$$

一方，問 2(5) より

$$n = 1 + \alpha k_{\mathrm{B}} \rho$$

であるので，

$$\alpha = \frac{e^2}{2k_{\mathrm{B}}\varepsilon_0(k - m\omega^2)}$$

と求まる。