略解

[1]

(1) $x^4-5x^2+6=(x^2-2)(x^2-3)=0$ より　$x=\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{3}$

(2) $1-2\mathrm{sin}^2\theta=3\mathrm{sin}\theta-1$ より
$2\mathrm{sin}^2\theta+3\mathrm{sin}\theta-2=(\mathrm{sin}\theta+2)(2\mathrm{sin}\theta-1)=0$
したがって $\mathrm{sin}\theta=1/2$。$\theta=30$ °，150 °

(3) $f(\frac{1}{2})=-2\times\frac{1}{2}\mathrm{log}_2\frac{1}{2}=1$

(4) 分母を有理化すると $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}+...\dfrac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{2}=\dfrac{\sqrt{2n+1}-1}{2}$

(5) $y=(x-a/2)^2-a^2/4-a+3$ のように変形すると、軸が正の条件 $a>0$, $x=0$ のとき $y>0$ より $-a+3>0$、よって $a<3$。x 軸と 2 点で交わる条件 $-a^2/4-a+3<0$。これより $a^2+4a-12>0$。因数分解すると $(a+6)(a-2)>0$。これを満たす範囲は $a>2$ または $a<-6$。すべての条件を満たす a の範囲は $2<a<3$。

(6) $f'(x)=12x^3-6x^2-12x+6=6(2x^3-x^2-2x+1)=6(x-1)(2x^2+x-1)=6(x-1)(2x-1)(x+1)$ より、$f(x)$ は $x=-1$ と $x=1$ で極小になる。$f(-1)=-8$、$f(1)=0$。よって最小値は -8

[2] $\triangle$ ABC の周の長さを ℓ、面積を s とおくと、求める周の長さ L は $L=\ell+\ell/2+\ell/4+...=\ell/(1-1/2)=2\ell$、面積 S は $S=s+s/4+s/4^2...=s/(1-1/4)=(4/3)s$。$\ell=3+4+5=12$、$s=3*4/2=6$ を代入すると $L=24\mathrm{cm}$、$S=8\mathrm{cm}^2$。

[3] 円の中心を $(x,y)=(0,a)$ とすると円の方程式は $x^2+(y-a)^2=1$。放物線 $y=x^2$ と接するには $x^2+(x^2-a)^2=1$ が重解を持てばよい。$x^4+(1-2a)x^2+a^2-1=0$ の判別式 $D=(1-2a)^2-4(a^2-1)=0$ より $a=\frac{5}{4}$。接点は $(x,y)=(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{4})$。面積は

$$\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}(\frac{5}{4}-\sqrt{1-x^2}-x^2)dx=\frac{5}{4}\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}-(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4})=\frac{3}{4}\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$$