[解答例]

[1]

（１） $(x+ai)^4-(x-ai)^4=\{(x+ai)^2+(x-ai)^2\}\{(x+ai)^2-(x-ai)^2\}=8iax(x^2-a^2)$ であるから、解は $x=0,\pm a$ 。

（２）$(x+yi)^2=x^2-y^2+2xyi$ および $(x-yi)^2=x^2-y^2-2xyi$ より、$(x-yi)^2=1-\sqrt{3}i$ である。したがって、$\{(x+yi)(x-yi)\}^2=(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)=4$ であるから、$(x^2+y^2)^2=4$ が得られる。 x^2+y^2 は負でないことに注意すると、 $x^2+y^2=2$ である。

（３） $f(1)=1, f'(1)=7$ より、 $g(x)=7x-6$ である。また、 $x=1$ で接することより、方程式 $f(x)-g(x)=x^4+3x^3-3x^2-7x+6=0$ は、$x=1$ で重根を持つ。このことに注意すると、 $f(x)-g(x)=(x-1)^2(x+2)(x+3)$ と整理できる。したがって、求める交点 (x,y) は、$(-2,-20),(-3,-27)$ である。

（４）(a) $(x-\sqrt{3}y)^2=x^2+3y^2-2\sqrt{3}xy\geq 0$ であるから、 $xy\leq\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ である。また、等号は $x=\sqrt{3}y$ のときに成り立つから、$x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ のとき最大値 $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ をとる(複号同順)。

(b) $x=\sin\theta, y=\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{3}}$ とすると、$x+y=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin(\theta+\dfrac{\pi}{6})$ になる。この右辺は $\theta+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最大値をとる。したがって、 $x+y$ は $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}, y=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ のとき、最大値 $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ をとる。

（５）倍角の公式より、$f(x)=\sqrt{2}(\sqrt{3}\sin x+\cos x)=2\sqrt{2}\sin(x+\dfrac{\pi}{6})$ である。したがって、$\dfrac{\pi}{6}\leq x+\dfrac{\pi}{6}\leq\dfrac{7}{6}\pi$ に注意すると、最大値は $2\sqrt{2}$ ($x=\dfrac{\pi}{3}$ のとき)、最小値は $-\sqrt{2}$ ($x=\pi$ のとき)になる。

[2]

（１）円 C_0 の中心は正三角形 OAB の重心の位置にあるから、半径 r_0 は 1 である。したがって、面積 $S_0=\pi$ 。

（２）円 C_1 と円 C_0 の接点を通り、線分 AB に平行な直線が OA, OB に交わる点をそれぞれ A’, B’とすると、三角形 OA’B’は高さ $\dfrac{1}{3}$ の正三角形である。したがって、相似比の関係より、$r_1=\dfrac{1}{3}$、 $S_1=\pi\dfrac{1}{3^2}$ 。

（３）同様に相似比の関係より、一般に円 C_n の半径を r_n とすると、 $r_n=\dfrac{1}{3}r_{n-1}$ の関係が成

り立つ。したがって、$r_n = \dfrac{1}{3^n}$, $S_n = \pi\dfrac{1}{9^n}$, $n = 0,1,2,\ldots$ であり、面積の総和 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} S_n$ は等比級数の公式より、$\dfrac{9}{8}\pi$ である。

[3]

交点Aの座標値は $(1,\sqrt{3})$ であるから、角 AOB=60°である。したがって、求めるべき面積は、$4\pi\times\dfrac{1}{6}-\int_0^1(\sqrt{3}x-\sqrt{3}x^3)dx=\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ である。