平成 20 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述

実施時間［9:00－17:00］

課題 II-A, II-B

（ 10:00－15:30 ）

注意事項

課題Ⅱには、[Ⅱ－A]、[Ⅱ－B]、[Ⅱ－C]、[Ⅱ－D]の４題があります。
志望するコースによって、次に示す問題を解答してください。

・物理学コース、フロンティアテクノロジーコース：
　[Ⅱ－A]、[Ⅱ－B]の両方を解答してください。

・人間探求コース：
　[Ⅱ－A]、[Ⅱ－B]、[Ⅱ－C]、[Ⅱ－D]の中から２題を選択して解答してください。

[Ⅱ-A]

物質の中の電子の性質は，その物質の性質を大きく左右する。例えば，電子の速度もその一つである。「物質の中にどれくらいの速度の電子がどの程度含まれているか」を調べるために，物質にエネルギーを与えて電子を放出させて，その速度を測る実験が広く行われており，先端の物質科学研究で重要な手法となっている。電子の速度を測定する装置は電子エネルギー分析器とよばれ，電場や磁場を利用する。ここでは以下の2種類のエネルギー分析器の動作原理を検討しよう。ただし，電子の素電荷を e，質量を m とし，必要に応じて以下の近似式を利用してよい。また，関数電卓を用いて計算する場合は角度の単位（ラジアンと度）の設定に注意すること。なお，電子に働く重力は十分小さいので無視して良い。

$|\theta| \ll 1$(単位はラジアン) のとき，

$$\sin\theta \doteqdot \theta - \frac{1}{6}\theta^3$$
$$\cos\theta \doteqdot 1 - \frac{1}{2}\theta^2$$
$$\tan\theta \doteqdot \theta + \frac{1}{3}\theta^3$$

また $|x| \ll 1$ のとき，

$$(1+x)^n \doteqdot 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$$

(但し，n は正負の実数)

$$\frac{1}{1+ax+bx^2} \doteqdot 1 - ax + (a^2-b)x^2$$
$$\frac{1}{1+ax+bx^2+cx^3} \doteqdot 1 - ax + (a^2-b)x^2 - (a^3-2ab+c)x^3$$

■問 1. 均一磁界を利用した分析器

図1のように xy 平面の座標 $(a,\ 0)$ に入射スリット孔 S_1，座標 $(0,\ a)$ に出射スリット孔 S_2 があり，紙面に垂直で裏から表の方向を向いた大きさ B_0 の磁場が第▪象限内に一様にかかっている。スリット孔は円形であり，その大きさは十分小さいとする。また，電子は xy 平面内のみを運動するとして以下の設問に答えよ。

(a)　入射スリット面に垂直な速度 $\vec{v} = (0,\ v_0)$ をもつ電子がスリット孔 S_1 に入射したとき，この電子が半径 a の円軌道を描いてスリット孔 S_2 を通過した後，検出器で検出された。このときの電子の速度の大きさ v_0 を求めよ。

このような装置を使えば，電子を速度に応じて分けることができる。しかしながら，実際の測定では以下に議論するように電子線の入射方向の誤差が深刻な問題となる。この点を考慮すると，実は上で考えた4分円の軌道を用いたエネルギー分析器は使い物にならない。

(b)　速さ v_0 を持つ電子がスリット面に垂直な方向から α[rad] ずれて S_1 に入射したとする。（図のような向きにずれたとき $\alpha > 0$ と定義する。）この電子は S_2 から距離 l だけ離れた y 軸上の点 $\mathrm{S} = (0,\ a+l)$ に到達する。このとき l を α の関数として表せ。さらに，$|\alpha| \ll 1$ であることを考慮して，l を α の多項式としてあらわせ。但し，α の次数が3以上の項は十分小さいので最終

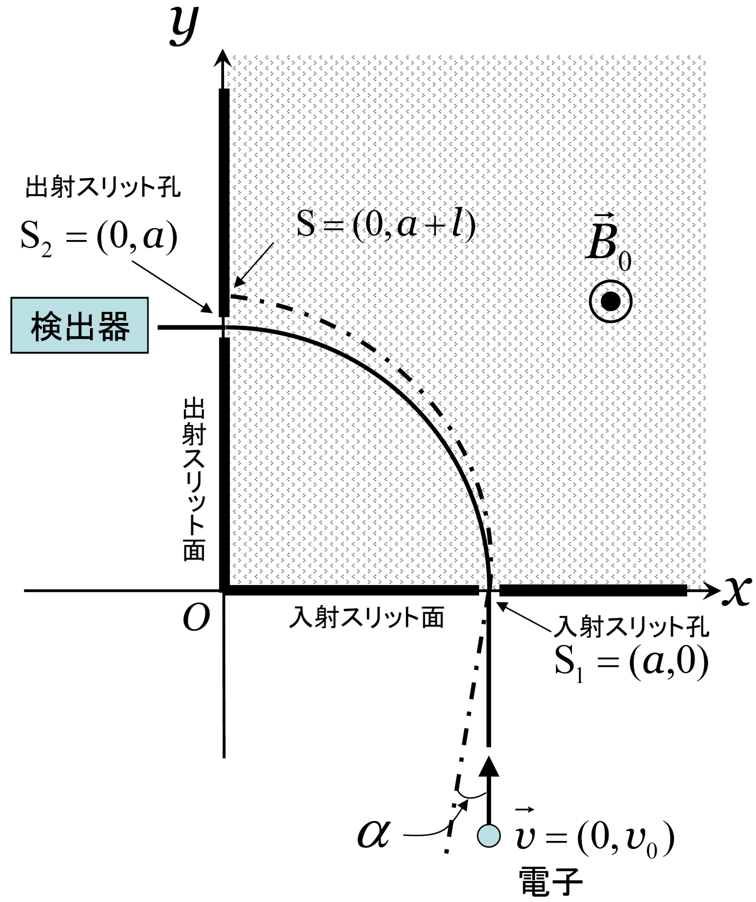

図 1

的な答えからは切り捨てよ。(つまり，定数項，α，α^2 の項のみを残す。)

この結果をふまえると，入射スリット孔 S_1 に正確に垂直入射した電子以外は，出射スリット孔 S_2 を通過しないことになる。実際の電子線では，速度ベクトルを特定の方向に完全に揃えることはできず，有限の大きさの角度幅を必ず持つ。このため，電子線のうち，たまたま正確な方向を向いているわずかな電子しか検出できないことになる。

(c)　速度 $\vec{v}=(0,\ v_0+u)$ の電子が，スリット面に垂直な方向から α[rad] ずれて S_1 に入射したとする。この電子がスリット孔 S_2 を通過して観測されるためには，u と α の間にどのような関係が成り立つ必要があるか求めよ。

(d)　様々な速度の電子が混ざってスリット孔に入射するときを考えよう。すべての速度の電子について，電子線が $-0.05<\alpha<0.05$[rad] の角度の範囲に一様に広がっているとする。検出器で観測される電子の速度の最大値を $v_{\max}$，最小値を $v_{\min}$ として，$(v_{\max}-v_{\min})/v_0$ を関数電卓を用いて具体的な数値として求めよ。これは，電子の速さの測定誤差の割合を反映する。

(e)　このような速度の誤差を改善するには，実は，半円軌道を利用して図２のように変更するとよい。図中では第▪第▪象限に紙面に垂直で裏から表の方向を向いた大きさ B_0 の磁場がかかっ

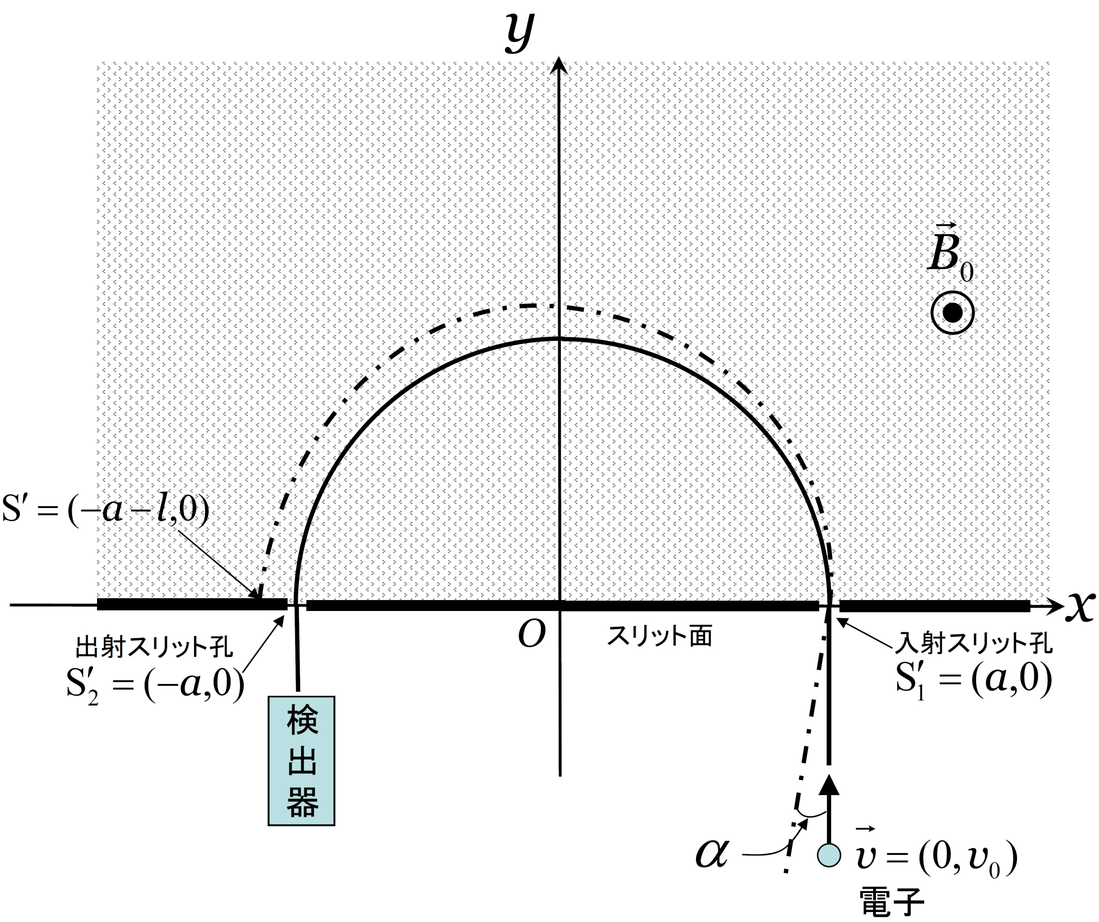

図 2

ている。問 (b)-(d) にならって，このエネルギー分析器の性能を評価せよ。

以上見てきたように，電子の軌道を四分円から半円に変えることで，検出される電子の速度の誤差が大幅に改善される。四分円の場合も半円の場合も，$\alpha = 0$ であれば $l = 0$ であった。しかし，α が 0 からずれたときの l の変化の仕方に違いがあった。求めた結果を見てみると改善効果があらわれた半円の場合は，$\alpha = 0$ で l の値が極値をとっていることがわかる。すなわち，l の α に関する微分係数 $\frac{dl}{d\alpha}$ が $\alpha = 0$ で零となっている。このことは，l が $\alpha = 0$ で 0 の値をとり，かつ接線の傾きが 0 であれば，微小な角度のずれが生じても，出射スリット孔からのずれ l はほとんど 0 となることを示している。このような状態を，電子線が出射スリット孔上に“収束”しているという。

(f)　この点をふまえて，四分円軌道の場合は電子線が収束せず，半円軌道の場合に収束する理由をできるだけ式を使わずに説明せよ。

一般に，入射電子の角度が α ずれたときに，出射スリット孔位置からのビームのずれ l は近似的に $l_1\alpha + l_2\alpha^2 + l_3\alpha^3 \cdots$ の様にあらわされる（l_1, l_2, $l_3 \cdots$ は係数)。図 2 の配置に対して解い

たように，α の 1 次の項の係数 l_1 が零の時，これを 1 次の収束とよぶ。l_1 のみならず l_2 も零になると，α による影響がさらに小さくなり，収束性が高まる。これは 2 次の収束と呼ばれ，高精度の実験に必要とされる条件である。

■問 2. 電界を用いたエネルギー分析器

問 1 で扱ったタイプのエネルギー分析器では二次の収束条件を実現することはできない。次に，電界を利用したエネルギー分析器で二次の収束条件が実現できる例を検討しよう。図 3 の様に，二枚の平行平板電極を利用したエネルギー分析器を考える。下側の電極はメッシュ状（格子状）になっており，電子は速度を変えることなく通り抜けることができる。下側の電極は接地されており，上側の電極には負の電位がかけられていて，電極間には y 軸の正の方向を向いた大きさ E_0 の一様な電場 $\vec{E} = (0,\ E_0)$ が発生している。メッシュ電極より下側は電場が零の領域となっている。図に示したように x 軸，y 軸を定義し，電子は xy 平面内のみを運動するとして以下の設問に答えよ。

（a）　図 3 の側面図にあるように、点 P $(0,\ -h)$ から速さ v_0 で飛び出した電子は直線運動をしてメッシュ電極上の点 Q に角度 θ で到達し，平行平板電極間で偏向され，メッシュ電極上の点 R に到達した後，電界のない空間を直線運動する。この直線軌道の途中に，大きさが無視できる円形のスリット孔 S を図のように設置し（スリット面は x 軸に平行とする），その先に検出器をおけば，速さ v_0 の電子を検出できる。問 1 でみたように，性能の高いエネルギー分析器を実現するには，点 P を飛び出す電子の角度がずれてもスリット孔上で電子線が収束することが必要である。1 次の収束条件を満たすスリット孔位置 S の座標を求めよ。但し，必要であれば以下の三角関数の微分公式を用いても良い。

$$\frac{d}{dz}\sin z = \cos z$$
$$\frac{d}{dz}\cos z = -\sin z$$
$$\frac{d}{dz}\tan z = \frac{1}{\cos^2 z}$$
$$\frac{d}{dz}\Big(\frac{1}{\tan z}\Big) = -\frac{1}{\sin^2 z}$$

但し，z の単位はラジアン

実は，入射角を $\theta = \frac{\pi}{6}$ とすると，この分析器は 2 次の収束条件を満たして高い性能を示す。以下，$\theta = \frac{\pi}{6}$ とし，前の設問で求めた位置にスリット孔を設置した場合の特性を検討しよう。

(b)　速さ $v_0 + u$ の電子が，点 P から角度 $\frac{\pi}{6} + \alpha$[rad] で飛び出したとする。この電子がスリット孔 S を通過して観測されるためには，u と α の間にどのような関係が成り立つ必要があるか求めよ。また，問 1(d) と同様に，様々な速度の電子が混ざった入射電子線が $-0.05 < \alpha < 0.05$[rad] の角度幅を持つとき，期待される測定精度を求めなさい。（関数電卓を用いて計算して良い。）

この答えからわかるようにエネルギー精度は問 1 のものより向上している。これは 2 次の収束が得られていることによる。最後にそのことを確かめよう。

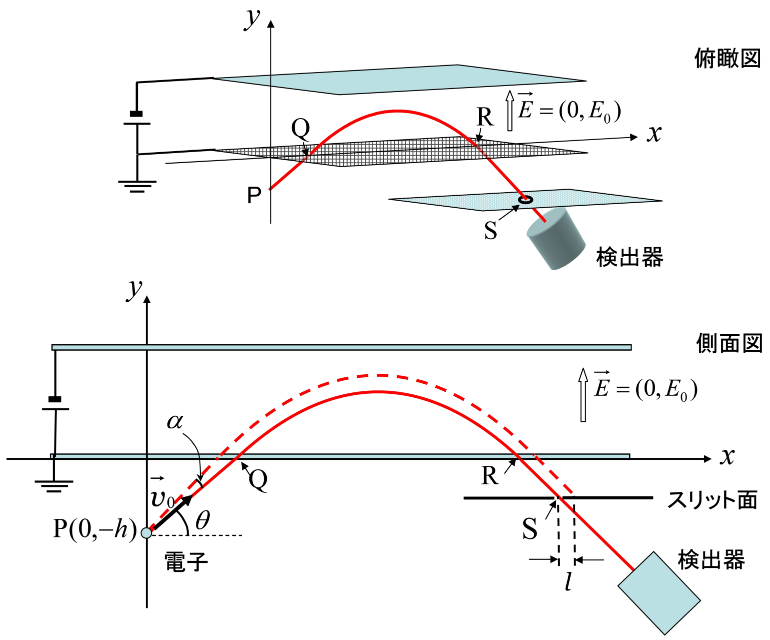

図 3

(c)　今，速さ v_0 で角度 $\frac{\pi}{6}+\alpha$ で点 P から飛び出した電子がスリット孔 S から l ずれたスリット面上の点に到達したとする。l を α の関数として求めよ。さらに α の多項式で近似し，2 次の収束条件が満たされていることを示せ。但し，α の 4 次以上の高次の項は十分小さいとし最終的な答えからは切り捨てよ。なお，多項式を求める以外の解法で解いてもかまわないし，α の値を 0 から少しずつ変えた場合を電卓で調べて考察してもよい。

問 2(a) の答えをよく見るとわかるように，実は，入射電子の運動エネルギーが変化すると，それに比例して収束点が特定の直線（これを収束面と呼ぶ）上を移動する。このため，様々な速さの電子が混ざって点 P から約 $\frac{\pi}{6}$ の角度で飛び出したとすると，その速さに応じて収束面上の異なる点に 2 次収束するので，速度に応じて異なる場所に電子を分離することができる。これは，太陽光がプリズムにより虹にわかれることと似ている。問 1 の分析器では磁場の強さに対応した特定の速度しか測定できないが，この分析器では，収束面上に微小な検出器を多数配列することで，一定の電場に対して様々な速度の電子を同時に測定できるので測定の効率が大幅に改善される。

[Ⅱ-B]

温度が異なる２つの物体を接触させると，温度の高い方から低い方へ熱が移動し，十分時間が経てば同じ温度になる。このように自発的に起こる変化とは逆に，温度の低い方から高い方へ熱を運ぶ手段について考察しよう。このような装置はヒートポンプと呼ばれ，家庭用の冷蔵庫やエアコンのような小規模のものから，ビルディングの冷暖房・給湯と温水プールの給湯まで賄うような大規模なもの，あるいは地中熱を利用して融雪を行うものなど，物を冷したり温めたりする手段として，現代の生活に欠かせないものになっている。

解答の式に用いる物理量としては，特に指示しない限り，**問題文中に与えられたものだけ**を用いること。気体定数は R とする。また，必要ならば以下のことを用いてよい。

> 単原子分子理想気体について，外界と熱のやり取りをしないようにした断熱環境で，体積を準静的に（十分ゆっくり）変化させるとき，その体積 V，圧力 P，温度 T の間には
>
> $$PV^{\frac{5}{3}} = \text{一定} \qquad \frac{T^{\frac{5}{2}}}{P} = \text{一定}$$
>
> という関係が成り立つ。
>
> 物質量 N の理想気体を温度 T の熱源と接触させて温度を一定に保ったまま，準静的に体積を $V_1 \to V_2$ と変化させるとき，外界が気体にする仕事は以下のようになる。
>
> $$-\int_{V_1}^{V_2} P(V)\,dV = -NRT\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V} = -NRT\log\frac{V_2}{V_1}$$

問 1 理想気体について考えよう。なめらかに動くピストンのついた容器に物質量 N の単原子分子理想気体を閉じ込め，外界と熱をやり取りしないように断熱壁で囲っておく。外界の圧力は十分低く 0 とみなしてよい。

最初，ピストンに一定の力をかけて気体の圧力を P_L に保っておいたところ，気体の温度は T_L であった。この状態からピストンにかける力をゆっくりと増やし，温度が T_H になるまで気体を圧縮した（過程 1)。

(1) このときの気体の圧力を求めなさい。また，気体の内部エネルギーを求めなさい。

(2) 過程 1 の間に外界から気体に対してした仕事を求めなさい。

続いて，温度 T_H の熱源と接触させ，そのままピストンにかける力をゆっくりと増やして，圧力が P_H になるまで気体をさらに圧縮した（過程 2)。その後，熱源との接触を絶った。

(3) 過程 2 の間に外界から気体に対してした仕事を求めなさい。

今度は，ピストンにかける力をゆっくりと減らし，温度が T_L になるまで気体を膨張させた（過

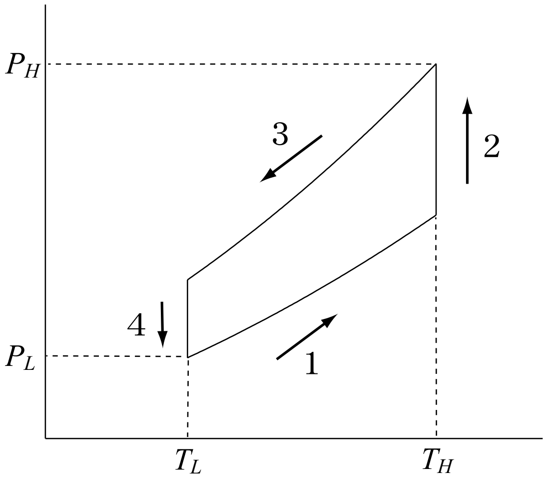

図1

程 3)。さらに，温度 T_L の熱源と接触させ，そのままピストンにかける力をゆっくりと減らして，圧力が P_L になるまで気体を膨張させた（過程 4)。その後，熱源との接触を絶った。

過程 1 から過程 4 を経て，気体は最初の状態に戻ったことになる（図 1)。この一連の過程は，断熱状態で十分ゆっくりと行われる断熱準静過程（過程 1，3）と，一定温度の熱源と接触させたまま十分ゆっくりと行われる等温準静過程（過程 2，4）の組み合わせになっており，カルノーサイクルと呼ばれる。上の設定では，サイクルの間に，温度 T_H の熱源に熱を放出，温度 T_L の熱源から熱を吸収し，低温熱源から高温熱源へ熱を運ぶヒートポンプとして動作する。

(4) 2 つの等温準静過程の間に，気体が熱源から吸収した熱をそれぞれ求めなさい。また，これらの熱の比を求め，それが 2 つの温度 T_L と T_H だけで決まることを示しなさい（この関係式は，カルノーの定理と呼ばれている)。

(5) このサイクルのヒートポンプとしての成績係数を次の式で定義する。

$$\text{成績係数} = \frac{\text{高温熱源に放出した熱}}{\text{サイクルを一周する間に外界から気体に対してした仕事の総和}}$$

以下の条件について，成績係数を求めなさい。$T_L = 280\text{K}$，$T_H = 300\text{K}$，$P_L = 10^6\text{Pa}$，$P_H = 10^7\text{Pa}$。

(6) カルノーサイクルの成績係数は 1 を超えていて，外界からした仕事よりも多い熱を高温熱源に放出するので，このサイクルはエネルギーの有効利用の手段といってもよいであろう。それぞれの過程で外界から気体に対してした仕事，気体が放出・吸収する熱を比較し，成績係数が 1 を超える理由を定性的に説明しなさい。

問 1 の問題はここまで。問 2 と**問 3** は独立した問題なので，どちらを先に解いても良い。

問 2 ここまで考えてきたような熱，仕事，エネルギー等の物理量に関する法則を記述する物理学の体系が熱力学である。熱力学では，いくつかの経験事実を正しいものと認めて基本法則とし，それらを元にいろいろな定理・関係式などが導かれる。その基本法則の一つが

自分自身には変化を残さずに，外界から受け取った熱を全て仕事に変える装置（第二種の永久機関）は，存在しない

というもので，熱力学第二法則と呼ばれる。第二種の永久機関はエネルギー保存則を破っているわけではないが，巨大な熱源があれば半永久的に仕事をし続ける，という夢の装置である。

この第二法則を正しいと認めると，**問 1(4)** で示したカルノーの定理が，理想気体に限らずあらゆる系のカルノーサイクルについて成り立つことを，示すことができる。ここでは背理法を用いてそれを示そう。**何かおかしな性質をもった仮想気体**が存在し，それを用いたカルノーの定理を満たさないようなカルノーサイクルが可能だとすると，第二種の永久機関ができてしまうことを示せばよい。そのために，カルノーの定理に従う理想気体のカルノーサイクルと，定理に従わない仮想気体のカルノーサイクルを，同時に動作させてみよう。

温度 T，体積 V の気体の状態を (T,V) のように表し，等温準静過程と断熱準静過程をそれぞれ

$$(T,V_1) \xrightarrow[\text{等温}]{} (T,V_2) \qquad (T_1,V_1) \xrightarrow[\text{断熱}]{} (T_2,V_2)$$

のように表すことにする。この表し方を使って，まず次のような理想気体（物質量 N）のカルノーサイクルを考える。

$$\text{サイクル▪} \quad (T_L,V_0) \xrightarrow[\text{断熱}]{\text{過程 A}} (T_H,V_1) \xrightarrow[\text{等温}]{\text{過程 B}} (T_H,V_2) \xrightarrow[\text{断熱}]{\text{過程 C}} (T_L,V_3) \xrightarrow[\text{等温}]{\text{過程 D}} (T_L,V_0)$$

ここでは，**問 1** で考えたカルノーサイクルと同様に，$V_0 > V_1 > V_2$ とする。

(1) 理想気体の内部エネルギーはその体積に依存しないので，温度 T のみの関数とみて $U(T)$ と表すことにする。これを使って，過程 A と過程 C で外界から気体にした仕事をそれぞれ表しなさい。

(2) サイクル▪を一周する間に外界から気体にする仕事の総和を，過程 B と過程 D で気体が吸収する熱 Q_B，Q_D を用いて表しなさい。

(3) サイクル▪は**問 1** で説明したようにヒートポンプとして動作する。これを逆に回した

$$\text{サイクル▪} \quad (T_L,V_3) \xrightarrow[\text{断熱}]{\text{過程 C}'} (T_H,V_2) \xrightarrow[\text{等温}]{\text{過程 B}'} (T_H,V_1) \xrightarrow[\text{断熱}]{\text{過程 A}'} (T_L,V_0) \xrightarrow[\text{等温}]{\text{過程 D}'} (T_L,V_3)$$

というサイクルはどんな動作をするか，外界との熱のやり取りだけでなく外界から気体にする仕事も関連付けて簡単に説明しなさい。

次にカルノーの定理に従わない仮想気体のカルノーサイクルを考える。温度 T，体積 V の状態の内部エネルギーを $u(T,V)$ と表すことにする。理想気体ではないので，内部エネルギーは温度だけでなく体積にも依存する。この気体について，次のようなカルノーサイクルを考えよう。

$$\text{サイクル▪} \quad (T_L,v_0) \xrightarrow[\text{断熱}]{\text{過程 a}} (T_H,v_1) \xrightarrow[\text{等温}]{\text{過程 b}} (T_H,v_2) \xrightarrow[\text{断熱}]{\text{過程 c}} (T_L,v_3) \xrightarrow[\text{等温}]{\text{過程 d}} (T_L,v_0)$$

ここでも $v_0 > v_1 > v_2$ とする。2 つの等温過程 b と d で気体が吸収する熱 Q_b，Q_d の比がカルノーの定理からずれているとしよう。

(4) このサイクルの間に外界から気体にする仕事の総和が $-Q_b - Q_d$ となることを示しなさい。

この仮想気体のカルノーサイクル▪と逆回しの理想気体のカルノーサイクル▪を，過程 C' と a，次に過程 B' と b のように，1 ステップずつ同期させながら動作させよう。過程 d で仮想気体が温度 T_L の熱源から吸収する熱 Q_d と，過程 D' で理想気体が同じ熱源に放出する熱が等しくなるように仮想気体の量を加減してあり，この熱源に出入りする熱の総和が 0 であるとする。こうしておけば，温度 T_L の熱源を取り除いて，理想気体が放出する熱を直接仮想気体に吸収させても，系全体の動作は変わらないと見なせる。

(5) 2 つのカルノーサイクルを一周する間に外界が行う仕事の総和が，温度 T_H の熱源から気体が吸収する熱の総和 $Q_B - Q_b$ に等しいことを示しなさい。また，この 2 つのサイクルの組み合わせで第二種の永久機関がつくれることを説明しなさい。

問 3 さて，ここまで考察したカルノーサイクルは現実のヒートポンプの動作とはかなり違っている。一歩現実に近いサイクルを考えよう。**問 1** と同様に，物質量 N の単原子分子理想気体を断熱壁で囲ったピストンに閉じ込め，圧力 P_L，温度 T_L の状態にする。この状態からピストンにかける力をゆっくりと増やし，圧力が P_5 になるまで気体を圧縮した（過程 5）。

(1) 過程 5 で外界から気体にした仕事を求めなさい。

続いて，気体の体積が変わらないようにピストンを固定したまま温度 $T_H(> T_L)$ の熱源と接触させ，十分時間が経った後熱源との接触を絶った（過程 6）。

(2) この過程で気体から熱源へ熱が放出された。この熱を求めなさい。

次にピストンに加える力をゆっくりと減らし，圧力が P_L となるまで気体を膨張させた（過程 7）。最後に，圧力を P_L に保ったまま温度 T_L の熱源と接触させ，気体の温度を T_L に戻した（過程 8）。この過程では，気体の体積が急激に変化しないようにピストンの動きを調整した。その後，熱源との接触を絶った。

(3) 過程 8 で気体が熱源から吸収した熱を求めなさい。

(4) 以下の条件について，ヒートポンプとしての成績係数を求めなさい。$T_L = 280\mathrm{K}$，$T_H = 300\mathrm{K}$, $P_L = 10^6\mathrm{Pa}$，$P_5 = 10^7\mathrm{Pa}$。

問題はここまで。

家庭用のエアコンはフロンガスを利用したヒートポンプである。電力を消費してモーターが仕事をし，冷房時は室内の熱をより高温の外気中に放出，暖房時は外気中から熱を吸収してより高温の室内に放出する。フロンガスは圧縮あるいは膨張するだけでなく，液化と気化を繰り返し，蒸発熱も利用して動作する。市販されているエアコンの成績係数は 4 程度である。このような高い成績係数を実現するには，理想気体でない実存気体を用いることが本質的に必要である。