

課題 I 課題趣旨と解答例

1. 【経験やビデオを見ての現象の観察力、説明を通しての解析・論理・表現力を問う】

どこに注目するかは、学生ごとに異なるかも知れない。観察、分析して、それを元に論理を組み立て、ちゃんと説明することができるかを評価したい。(ブランコの物理を理詰めでも考えても良いし、実験で得られる体感的な事実に基づいて説明しても良い。実際、糸を引いたりゆるめたりしておもりを回転させてみると、おもりに力を加えて加速している様子が実感できる。)

<解答例>

・ビデオを観察すると、動いている時に膝を伸ばし、止まるときに膝を曲げている。ところで、スケートで回転している時には、腕を縮めると回転速度が速くなり運動のエネルギーは増える。これと同じように、ブランコで膝をのばすと回転中心からの距離が減るために、運動エネルギーは増えることになる(遠心力に逆らって仕事をしている)。一方、止まるときに膝を縮めても、止まっているために運動エネルギーは減ることないので、この運動を繰り返していると揺れのエネルギーは増えていく。

・ビデオを観察すると、止まるときに膝を曲げ、ふれながら下付近で膝を伸ばしている。下で膝を伸ばすと、伸ばした長さだけ位置エネルギーを獲得する。一方、止まるときに膝を曲げると、同じ長さ曲げても、止まる点は傾いているために失う位置エネルギーは先ほどより少ない。このために、この運動を繰り返すとエネルギーは増え、揺れが大きくなる。

参考1：ブランコの運動方程式 藤原邦男「振動と波動」サイエンス社より

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = mg \cos \theta - T$$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = -mg \sin \theta$$

微小振動では、 $x = r \sin \theta \cong r\theta$ 。この時、 $m\ddot{x} + \frac{m(g - \ddot{r})}{r}x = 0$ 、つまり $m\ddot{x} + m\omega^2 x \cong \frac{m}{l}\ddot{r}x$ 。

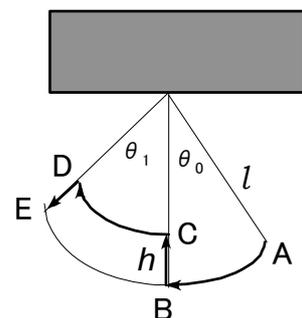
\dot{x} かけて積分すると、 $\frac{1}{2}[m\dot{x}^2 + m\omega^2 x^2]_0^t = \frac{m}{2l} \int_0^t dt \frac{d(x^2)}{dt} \ddot{r}$ 。この式から、下降時

($d(x^2)/dt < 0$) に膝を縮め ($\dot{r} > 0, \ddot{r} < 0$)、上昇時に膝を伸ばせば増幅する。8 の字運動。

例えば、右図のような極端な運動の場合のエネルギーを考える。

<点> <エネルギー>

A $mgl(1 - \cos \theta_0)$ 位置エネルギー



B $mgl(1 - \cos \theta_0)$ 全てが運動エネルギーに変わる

C $mgl(1 - \cos \theta_0) \left(\frac{l}{l-h} \right)^2 + mgh$

角運動量保存 $vl = v'(l-h)$ 運動エネルギー $\frac{v^2}{2m} \rightarrow \frac{v'^2}{2m}$ つまり $\{l/(l-h)\}^2$ 倍増加

D $mgl(1 - \cos \theta_1)$ 位置エネルギー

ただし、 $mgl(1 - \cos \theta_0) \left(\frac{l}{l-h} \right)^2 + mgh = mgl(1 - \cos \theta_1)$ 。

この式から、角度も増加する ($\pi > \theta_1 > \theta_0$) ことがわかる

E $mgl(1 - \cos \theta_1) - mgh \cos \theta_1$

結局、A→Eでのエネルギーの増加は、

$$\Delta E_{0 \rightarrow 1} = E - A = mgl(1 - \cos \theta_0) \frac{l^2 - (l-h)^2}{(l-h)^2} + mgh(1 - \cos \theta_1) > 0$$

運動エネルギー増加 位置エネルギー増加

参考2：パラメトリック発振

振動の固有周波数を決めるパラメーターの値を周期的に変化させることで振動を誘起する現象をパラメトリック発振という。振り子の場合、ひもの長さ、おもりの重量、重力加速度などが周期を決めるパラメーターであり、立ちこぎブランコではひもの長さを周期的に変化させることでブランコが揺れているわけである。

参考3：糸の長さが変わる振り子における張力のする仕事量

・非保存力がした仕事だけ系の力学的エネルギーは増加する。糸の長さが変わる振り子においては、糸の長さが変化するとき仕事をする。張力は非保存力であり、その仕事量だけ振り子のエネルギーは増加する。このように考えると、ブランコでは遠心力や重力などの力がもっとも強く作用するタイミングにその力の方向に仕事をするとエネルギーを稼ぐことができる。

以上の説明はブランコに載っている人の座標系から見た様子であるが、外の慣性系からながめると以下のように考えることができる。ひもの長さが変わらないときには軌道は円運動であり、おもりの速度ベクトルと張力の方向は直交するので張力は仕事をしない。糸の長さが変わるときは、おもりの速度ベクトルは張力の方向とは直交しなくなるので、張力によりおもりを加速できるわけである。

2. 【新現象への観察・比較分析・想像力、説明を通しての論理・表現力を問う】

<解答例>

・このブランコの場合、箱の向きが絶えず一定方向を向いているため、重心位置によらず回転半径は一定である。このため、糸の長さが変わることによる速度増加はおきない。しかし、遠心力に逆らって重心移動を行うと、その仕事分の速度増加を得ることができる。上下の動きに関する位置エネルギーの増減に関しては、常時鉛直方向を向いているので、エネルギー収支は零となる。そこで、上下の動きの他にも、例えば左右の体重移動などにより、遠心力に抗して周期的に仕事をすれば、揺れを大きくすることもできる。これは、投げ縄をするときに縄をぐるぐる回すのと似ていて、縄の長さは一定だが手首が円を描くようにまわすと投げ縄もよく回る。このことを考えると、箱の中で円を描くような体重移動も有効なこぎ方と考えられる。

・この回転ブランコは、回転させやすいようにアームの端におもりがつけてあったり、箱の向きを一定に保つメカニズムなどの工夫がされている。そのような点にも注意してブランコとの類似点と相違点動を観察して欲しい。

・**参考4**：この回転ブランコは、パラメトリック発振という点で見ると糸の長さは変えずに重力加速度 g を変化させることで振動させている系と考えることができる。箱の中で人が移動して重心を動かしても回転半径は常に一定に保たれている。逆にいうと、円運動している状態でその中心を動かしていることになる。ブランコの座標系で考えると、中心移動により慣性力が働くとみなせるので、中心移動により重力が強くなったり弱くなったりすることになり、パラメトリック発振と見なすことができる。

また、外の慣性系から眺めた場合は、糸の長さを変えずにおもりを円運動させている状態で、支点を糸の方向とは異なる方向に動かすと、張力はおもりに対して仕事をするので、加速できるわけである。

3. 【発想力、表現力を問う】

ユニークなもの、意外性のある発想ができるかをみるとともに、考案し遊具をきちんと説明できるかを評価する。