[II–B] 解答例

問 1

(a)

$$U = \frac{QV}{2} = \frac{CV^2}{2} = \frac{Q^2}{2C} \tag{1}$$

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d} \tag{2}$$

$$Q = CV \tag{3}$$

$$E = \frac{V}{d} \tag{4}$$

を組み合わせることにより,

$$U = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 S} \tag{5}$$

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} \tag{6}$$

(b)

$$U = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} Sd \tag{7}$$

(c) 単位体積あたり $\varepsilon_0 E^2/2$ ののエネルギーが蓄えられていると考えるのが妥当である。

(d) 単位長さ当たりの巻き数 $n = N/\ell$ なので

$$H = \frac{IN}{\ell} \tag{8}$$

$$B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 IN}{\ell} \tag{9}$$

$$U = \frac{LI^2}{2} \tag{10}$$

また断面積 $S = \pi a^2$ なのでコイルのインダクタンスは

$$L = \frac{\pi a^2 \mu_0 N^2}{\ell} \tag{11}$$

なので,

$$U = \frac{\pi a^2 \mu_0 N^2 I^2}{2\ell} \tag{12}$$

である。

(e) **(d)** の結果を整理すると，

$$U \;=\; \frac{B^2}{2\mu_0}\,\pi a^2 \ell \tag{13}$$

と表現できるので，単位体積当たり $B^2/2\mu_0$ のエネルギーが磁場に蓄えられていると考えるのが妥当である。

問 2

(a) 磁束は $\Phi \;=\; B\,\ell\,a$ なので磁束の変化は $\Delta\Phi \;=\; \Delta B\,\ell\,a$ となる。従って，長方形を 1 周する経路にそった起電力の大きさは

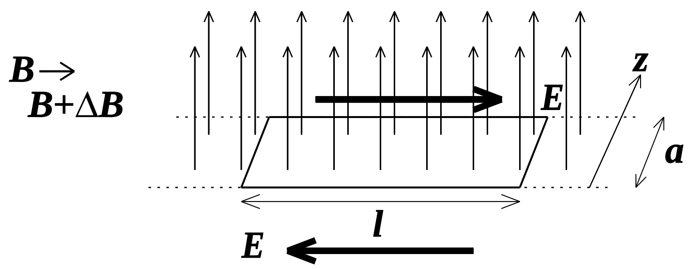
$$V \;=\; -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \;=\; -\frac{\Delta B}{\Delta t}\,\ell\,a \tag{14}$$

となる。議論を分かりやすくするため，以下では磁場の方向を x，磁場の帯が延びる方向を y，これらに垂直な方向を z としよう。問題の磁場分布は y 方向に一様なので，電場も y 方向に一様なはずである。また $(y,\ z) = (0,\ 0)$ を中心に 180° 回転しても元の磁場分布が再現できる (点対称) なので，長さが a の辺に生じる起電力はどちらも 0 となるはずである (0 でないなら 180° したとき、符号が異なり矛盾する)。これらのことより，ℓ の辺での電場を E とすると起電力は $2E\ell$ なので，$E \;=\; (a/2)\,(\Delta B/\Delta t)$ が得られる。

幅が a よりも狭い長方形の導線をおいて考えると，囲まれる磁束が幅に比例するので，起電力も幅に比例して小さくなる。幅を a より大きくしても，囲まれる磁束は変わらないので，起電力は一定である。これらのことを考えると，電場の絶対値は

$$|E| \;=\; \begin{cases} \dfrac{\Delta B}{\Delta t}\,|z| & |z| \;\leq\; a/2 \\ \dfrac{\Delta B}{\Delta t}\,\dfrac{a}{2} & |z| \;>\; a/2 \end{cases} \tag{15}$$

となるはずである。ここで z は磁場の帯の中心を 0 とし，それに垂直な座標である。



太い矢印は、磁場が増える場合に発生する電場の向きを表している。

(b) 微少な時間 Δt での磁場の変化 ΔB は

$$\Delta B \;=\; \begin{cases} 0 & z \leq vt - 2a \\ -\dfrac{B_0 v \Delta t}{a} & vt - 2a < z < vt - a \\ \dfrac{B_0 v \Delta t}{a} & vt - a \leq z \leq vt + a \\ -\dfrac{B_0 v \Delta t}{a} & vt + a < z < vt + 2a \\ 0 & z \geq vt + 2a \end{cases} \tag{16}$$

なので，真ん中に幅 $2a$ で磁場が増える領域が現れ，その両側に幅 a で磁場が減る領域が現れる。(各区間の端での磁場の変化を数学的に厳密に取り扱うのは難しいので，ここでは要求しない。)　各区間では微少な時間での磁場の変化が一定なので、**(a)** を適用できる。すなわち、各区間の内部では z の増加に伴い，電場が一定の割合で増えるはずである。各区間での磁場の増減を考えると，電場の強さは

$$E_x(z,\ t) \;=\; \begin{cases} 0 & z \leq vt - 2a \\ B_0 v \dfrac{z - vt + 2a}{a} & vt - 2a < z < vt - a \\ -B_0 v \dfrac{z - vt}{a} & vt - a \leq z \leq vt + a \\ B_0 v \dfrac{z - vt - 2a}{a} & vt + a < z < vt + 2a \\ 0 & z \geq vt + 2a \end{cases} \tag{17}$$

となるはずである。この結果は z がいくつであっても

$$E_x \;=\; v\, B_y \tag{18}$$

が成り立っていることを意味している。

(c) 図のように電流 I が流れると，上下の切断面に $\pm Q$ の電荷がたまる。下の切断面にたまる電荷を Q とするとその時間変化は

$$\frac{dQ}{dt} \;=\; I \tag{19}$$

と表される。導線の断面積を S とすると，切断された箇所には

$$E \;=\; \frac{Q}{\varepsilon_0 S} \tag{20}$$

の上向きの電場が発生する。従って電場の時間変化は

$$\frac{dE}{dt} \;=\; \frac{1}{\varepsilon_0}\, \frac{I}{S} \tag{21}$$

となる。右辺の I/S は導線を流れる単位面積当たりの電流を意味するので，電場が変化した領域には発生する磁場は，単位面積あたり $\varepsilon_0\, dE/dt$ の電流が流れている場合の磁場と同等の強さであると考えられる。電場 E の増加と電流の向きは同じなので，発生する磁場の向きは，電場の増加する向きに電流が流れていると考えて計算すればよい。

(d) **(b)** と同じように電場の変化を計算すると，

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = \begin{cases} 0 & z \leq vt - 2a \\ -\dfrac{B_0 v^2}{a} & vt - 2a < z < vt - a \\ \dfrac{B_0 v^2}{a} & vt - a \leq z \leq vt + a \\ -\dfrac{B_0 v^2}{a} & vt + a < z < vt + 2a \\ 0 & z \geq vt + 2a \end{cases} \tag{22}$$

となる。この電場の変化により，中央の幅 $2a$ の領域には単位面積当たり $\varepsilon_0 B_0 v^2/a$ の電流が，その左右の幅 a の領域には単位面積当たり $-\varepsilon_0 B_0 v^2/a$ の電流が流れているときと同じ大きさと向きの磁場ができる。電流がつくる磁場を合計すると

$$B_y(z,\ t) = \begin{cases} 0 & z \leq vt - 2a \\ \varepsilon_0\mu_0 v^2\, B_0\, \dfrac{z - vt + 2a}{a} & vt - 2a < z < vt - a \\ -\varepsilon_0\mu_0 v^2\, B_0\, \dfrac{z - vt}{a} & vt - a \leq z \leq vt + a \\ \varepsilon_0\mu_0 v^2\, B_0\, \dfrac{z - vt - 2a}{a} & vt + a < z < vt + 2a \\ 0 & z \geq vt + 2a \end{cases} \tag{23}$$

となる。問題文と比較すると，$\varepsilon_0\mu_0 v^2 = 1$ であれば，元と同じ磁場が得られることが分かる。

教科書の巻末に載っている値 $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ F/m と $\mu_0 = 4\pi\, 10^{-7}$ H/m を代入して調べると $v = \pm 3.0 \times 10^8$ m/s のとき条件が満たされることが分かる。これは電磁波が光速度で伝わることを意味している。速度 v が負の場合は問題の図で左に進む場合を表している。途中に $E_x = vB_y$ という関係式があったので，電場か磁場の向きを変えると電磁波の進行方向が変わることが分かった。

(e) 単位体積あたりの電場のエネルギーは $\varepsilon_0 E_x^2/2$ であるが，式 (18) と $v = c$ を使うと，

$$\frac{\varepsilon_0 E_x^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 c^2 B_y^2}{2} = \frac{B_y^2}{2\mu_0} \tag{24}$$

と変形できるので，どの場所でも磁場のエネルギーと等しい。従って，全体も等しい。