平成 22 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

数学　解答例

平成22年度先進科学プログラム入学者選考課題：数学解答例

1. $x=1$ と $x=2$ が解であることは代入してみればわかるので因数分解できて $(x-1)(x-2)(x^2+2x+2)=0$。したがって解は $x=1$, $x=2$, $x=-1\pm i$。

2. 分母を有理化する。
$$\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2-3}$$
$$=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}$$

3. $2(1-\cos^2\theta)+5\cos\theta+1>0$ を整理すると $2\cos^2\theta-5\cos\theta-3<0$。左辺を因数分解すると $(\cos\theta-3)(2\cos\theta+1)<0$。$\cos\theta\leqq 1$ だから $\cos\theta-3<0$ 。よって $2\cos\theta+1>0$。したがって $\cos\theta>-1/2$。これを満たす θ の範囲は $0\leqq\theta<2\pi/3$、$4\pi/3<\theta<2\pi$。

4. x, y, z のいずれも3の倍数でないと仮定する。3で割って1余る数の2乗を3で割った余りは1, 3で割って2余る数の2乗を3で割った余りも1。したがって x^2+y^2 を3で割った余りは2、z^2 を3で割った余りは1となって矛盾する。よって、x, y, z の少なくともひとつは3の倍数である。

5. (a) n が奇数になるのは3個とも目が奇数のときに限られる。1個のサイコロについて奇数の目が出る確率は1/2だから n が奇数になる確率は $(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{8}$。よって n が2で割り切れる確率は $\frac{7}{8}$。
   (b) n が6で割り切れるのは、n が2でも3でも割り切れる場合である。この確率は、n が2で割り切れる確率から n が2で割り切れるが3で割り切れない確率を引くことによって求まる。後者の確率は n が3で割り切れない確率 $(2/3)^3=8/27$ から2でも3でも割り切れない確率 $(1/3)^3=1/27$ を引くことによって求まり、7/27。したがって、n が6で割り切れる確率は $\frac{7}{8}-\frac{7}{27}=\frac{133}{216}$。

6. $x^2+x-2=(x+2)(x-1)$ だから x^2+x-2 の値は $x<-2$ または $x>1$ のとき正、$-2<x<1$ のとき負。したがって
$$\begin{aligned}S=\int_0^2|x^2+x-2|dx &= -\int_0^1(x^2+x-2)dx+\int_1^2(x^2+x-2)dx\\ &= -(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x)|_0^1+(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x)|_1^2\\ &= -\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2+\frac{7}{3}+\frac{3}{2}-2=3\end{aligned}$$

7. 以下のように S_n と pS_n の差を求める。
$$\begin{aligned}S_n=1 &+ 2p+3p^2+4p^3+...+np^{n-1}\\ pS_n= &\quad p+2p^2+3p^3+...+(n-1)p^{n-1}+np^n\end{aligned}$$
より、$S_n-pS_n=1+p+p^2+...+p^{n-1}-np^n$。
$p\neq 1$ の場合。$(1-p)S_n=(1-p^n)/(1-p)-np^n$。よって
$$S_n=\frac{1-p^n-np^n(1-p)}{(1-p)^2}$$
$p=1$ の場合、
$$S_n=1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$