

平成 23 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述

実施時間 [9:00－17:00]

課題 II-A, II-B

(10:00－15:30)

注意事項

課題Ⅱには、[Ⅱ-A]、[Ⅱ-B]、[Ⅱ-C]、[Ⅱ-D]の4題があります。
志望するコースによって、次に示す問題を解答してください。

- ・物理学コース、フロンティアテクノロジーコース：
[Ⅱ-A]、[Ⅱ-B]の両方を解答してください。
- ・人間探求コース：
[Ⅱ-A]、[Ⅱ-B]、[Ⅱ-C]、[Ⅱ-D]の中から2題を選択して解答してください。

[II-A]

水面に物体を投げ入れたり，水滴が水面に落下したときに，耳に聞こえる音が発生する。音の発生源は何であろうか。水滴が水面に落下した直後の様子を捉えた写真（図1）を見ると，このとき水面下に直径数ミリメートルの気泡が発生しているのがわかる。気泡はばねのような弾性をもつクッションの役割をするので，周囲の水が気泡へ近づいたり遠ざかったりしながら気泡は収縮と膨張を繰り返して振動し，音として聞こえると考えられる。水中の気泡による水滴音の発生について考えてみよう。

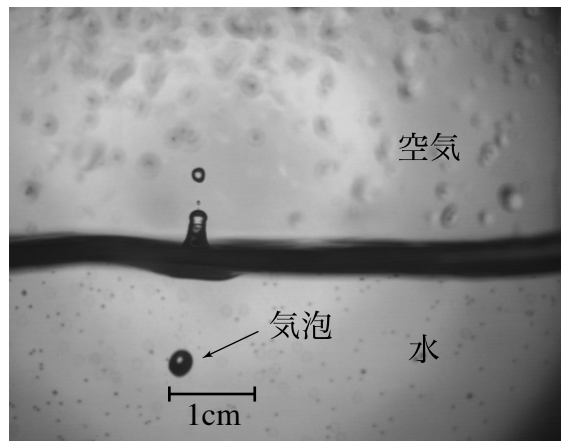


図 1

【問1】 はじめに，図2のような，なめらかな水平面上での，ばねとおもりによる単振動を考えよう。ばねの自然の長さを l_0 ，ばね定数を k ，単振動の振幅を A ，角振動数を ω ，おもりの質量を m として，以下の設問に答えなさい。

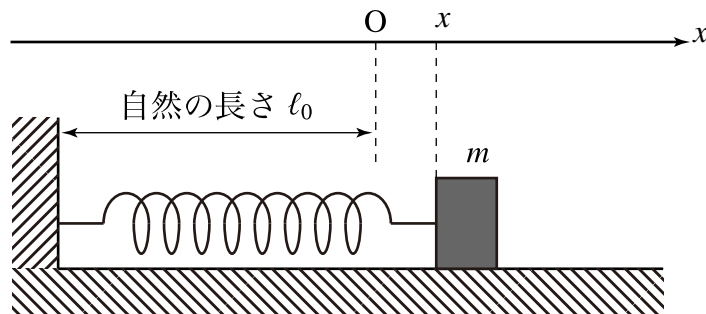


図 2

- (a) おもりの運動エネルギー E_K の最大値 $E_{K,\max}$ と， E_K が最大となるおもりの位置 x を， A, m, ω, l_0 のうち必要なものを使って表しなさい。

- (b) ばねの弾性力による位置エネルギー E_P の最大値 $E_{P,\max}$ と、 E_P が最大となるときのおもりの位置 x を、 A, k, ℓ_0 のうち必要なものを使って表しなさい。
- (c) 単振動のエネルギー E_T を、 A, m, ω を使って表しなさい。
- (d) 単振動のエネルギー E_T とおもりの運動エネルギーの最大値 $E_{K,\max}$ 、弾性力による位置エネルギーの最大値 $E_{P,\max}$ の間の関係を表しなさい。

問1の問題はここまで。以下の問2と問3は、どちらから解くこともできる。

【問2】 気泡は球形であると仮定し、図3のように1つの気泡が無限に広い水中に置かれているものとする。ここでは、気泡が球形を保ったまま膨張と収縮を繰り返すような体積振動を考える。すなわち、気泡半径 R と時間 t との関係が、 $R = R_0 + x(t)$ 、 $x(t) = A \sin \omega t$ で与えられる単振動を考え、減衰はないとする。ここで、 R_0 はつり合いの状態での気泡半径、 A は振幅、 ω は角振動数で、いずれも定数である。ただし振幅 A は気泡半径 R_0 に対して微小であり、 $\frac{A}{R_0} \ll 1$ が成り立つものとする。

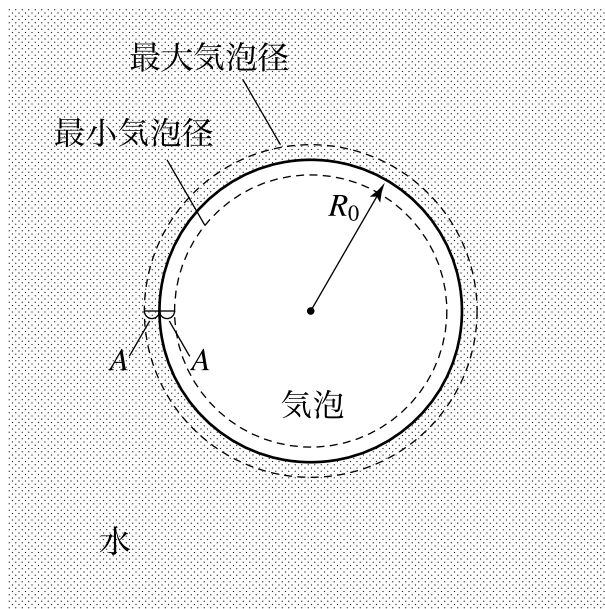
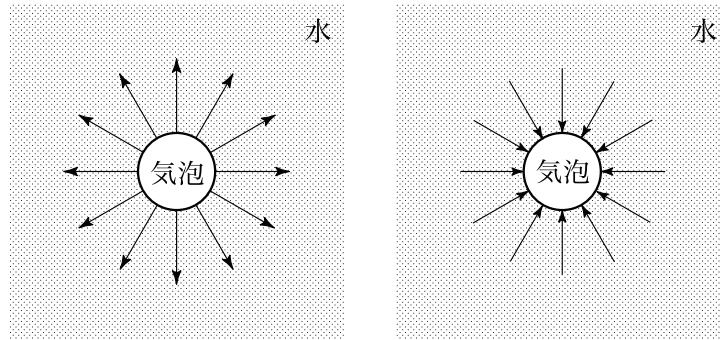


図3

気泡の膨張・収縮に伴い、周囲の水には図4のような流れが生じる。流れの方向は放射状なので、ある瞬間の流れの速さは気泡中心からの距離 r だけに依存する。以下の設問に答えなさい。ただし、水は縮まないと考えてよく、水の密度 ρ は一定であるとする。



気泡膨張時の流れ

気泡収縮時の流れ

図 4

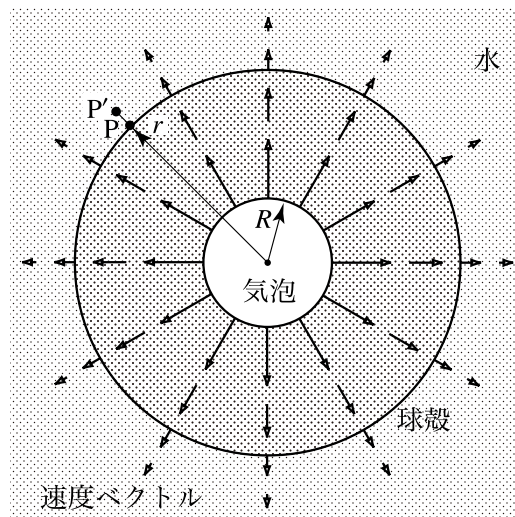


図 5

- (a) 図 5 に示すような、時刻 t に任意の半径 r の球殻上にある点 P を目印とする。時刻 t における点 P の位置での流れの速度を v とするとき、点 P は、微小時間 Δt 後にどこに移動するか。移動先の点 P' の半径 r' を、 $r, v, t, \Delta t$ の中から必要なものを用いて表しなさい。
- (b) 時刻 t における気泡表面 ($r = R$) での水の速度 $v_R = \frac{dR}{dt}$ を、 $R, A, \omega, t, \Delta t, \sin \omega t, \cos \omega t$ の中から必要なものを用いて表しなさい。
- (c) 点 P より内側にある水の質量が移動の前後で変化しないことに注意して、点 P の動く速度 v を $R, r, A, \omega, \sin \omega t, \cos \omega t$ の中から必要なものを用いて表しなさい。ただし、 Δt の 2 次以上の項は省略して考えてよい。

(d) 位置 r における単位体積あたりの水の運動エネルギーは、(c)で求めた水の速度 v を使って、 $\frac{1}{2}\rho v^2$ と書ける。また、半径が r から $r+dr$ に含まれる体積は、 $4\pi r^2 dr$ である。したがって、図5のような気泡表面と気泡中心から半径 $a (> R)$ の球殻に挟まれた領域の水の運動エネルギーは、

$$\int_R^a \frac{1}{2}\rho v^2 4\pi r^2 dr$$

のように書ける。ここでは、水は無限に広がっているから、全領域の水の運動エネルギー E_K は、この積分の計算結果に対して $a \rightarrow \infty$ とすることにより求めることができる。全領域の水の運動エネルギーを(b)で求めた気泡表面の速度 $\frac{dR}{dt}$ を使って t だけの関数 $E_K(t) = \frac{1}{2}M \left(\frac{dR}{dt}\right)^2$ と書いたとき、 M を ρ, R を用いて表しなさい。

【問3】 気泡のばねとしてのはたらきについて、次のような実験で考えよう。

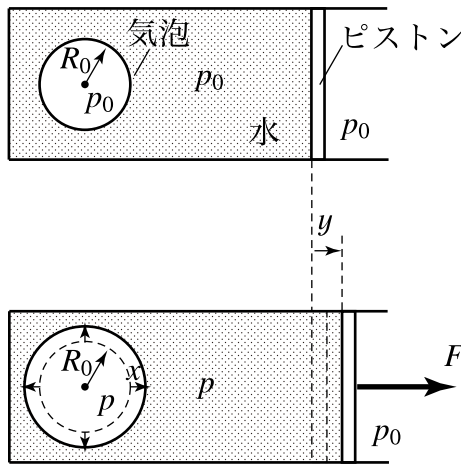


図6

図6のような水を満たした円筒容器の中に球形気泡が1つだけ入っている。ピストンの断面積は S で、ピストンは自由に動けるものとする。ピストンの外側からは p_0 の圧力が常にはたらいており、このとき自然の状態での気泡の半径は R_0 である。図6のようにピストンに力 F を加えたところ、ピストンが y だけずれてつり合った。このとき気泡の半径は x だけ増加し、気泡の圧力は p になった。以下の設問に答えなさい。ただし、この状態では気泡内外の圧力は一樣で、表面張力や重力による圧力の変化は考えなくてよい。気泡の膨張・収縮の過程では、周囲の流体との熱のやり取りはなく断熱変化しているの

圧力 p と気泡体積 V の間には,

$$pV^\gamma = \text{一定}$$

の関係が成り立つ。ここで γ は比熱比と呼ばれる。

- (a) ピストンにはたらく力のつり合いの式を F, p_0, p, S を用いて表しなさい。
- (b) 気泡内部の圧力 p を, γ, p_0, R_0, x を用いて表しなさい。
- (c) ピストンの移動量 y と気泡半径の増加量 x の関係を求めよう。ピストンの移動前の気泡の体積 V_0 と移動後の気泡の体積 V の比 $\frac{V}{V_0}$ を y および x を使ってそれぞれ表し比較することによって, y を R_0, S, x を用いて表しなさい。ただし, 水は縮まないと考えてよく, 水の体積は一定としてよい。また, $\left| \frac{x}{R_0} \right| \ll 1$ のとき $\left(1 + \frac{x}{R_0} \right)^n \approx 1 + n \frac{x}{R_0}$ (n は正負の実数) を用いてよい。
- (d) (b) と (c) の結果から, ピストンに加えた力 F とピストンの移動量 y の関係を求め, ばね定数 k の値を p_0, γ, R_0, S を使って表しなさい。
- (e) (d) で求めたばね定数 k を使って気泡の弾性力による位置エネルギー E_p を求めなさい。また, この E_p を, $E_p = \frac{1}{2} k' x^2$ のように x の式で表したときの k' を求めなさい。

【問4】 問2で求めた水の運動エネルギーと, 問3で求めた気泡の弾性力による位置エネルギーの関係を考えて, 気泡の振動数を求めてみよう。以下の設問に答えなさい。ただし, 空気の運動エネルギーは無視してよい。

- (a) 力学的エネルギーの保存を考えると, 気泡の振動数を R_0, p_0, γ, ρ を用いて表しなさい。
- (b) つり合いの状態での気泡周囲の圧力 p_0 は1気圧 = 10^5 Pa, このときの気泡の直径を3.0 mmとする。この気泡の振動数はいくらか。ただし, 空気の比熱比 $\gamma = 1.4$, 水の密度 $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ である。

[II-B]

諸君は天体望遠鏡で星を見たことがあるだろうか。中でも、輪を持つ土星などを見てその美しさに感動した経験のある人も多いのではないだろうか。さて、夜空には自ら光を放って輝く恒星が無数にあるが、これを天体望遠鏡で拡大して見るとその星の形は見えるのだろうか。

地球に比較的近い距離にある明るい恒星として、おおいぬ座のシリウスがある。シリウスは地球から 8.6 光年の距離にあり、その直径は太陽の約 1.7 倍の $2.4 \times 10^9 \text{ m}$ であるという。なお、1 光年の距離とは $9.5 \times 10^{15} \text{ m}$ である。

問 1 天文学では、ある天体を観測したときの見かけの大きさを「視直径」と呼んで、図 1 のように角度の単位で表す。シリウスの視直径をラジアン単位で有効数字 2 桁で求めなさい。また、シリウスの視直径は、1.0 km 先に置いたどの程度の大きさの物を見ることに相当するのか答えなさい。

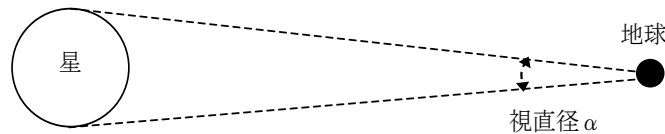


図 1

問 1 で確認したように、シリウスの視直径はあまりに小さく、現代の高性能な望遠鏡を用いてもその形を直接観察することはできないという。以下では、別のやり方で恒星の視直径を測定する方法について考察を進めよう。

光は電磁波の一種であるので波としての性質を持っている。まず基本的な波の性質である「干渉」について考えよう。図 2 のように、大きさの無視できる点光源から波長 λ の光が発せられ、間隔 d の複スリットを通り、スリットから十分に離れた距離 l にあるスクリーン上に明暗の縞模様を作っている。なお、 $d \ll l$ とする。

問 2 スクリーン中央の、最も明るい点の位置を $x=0$ とすると、そのすぐ側で初めて暗くなる位置 x_1 を求めなさい。ただし、 $x_1 > 0$ とする。

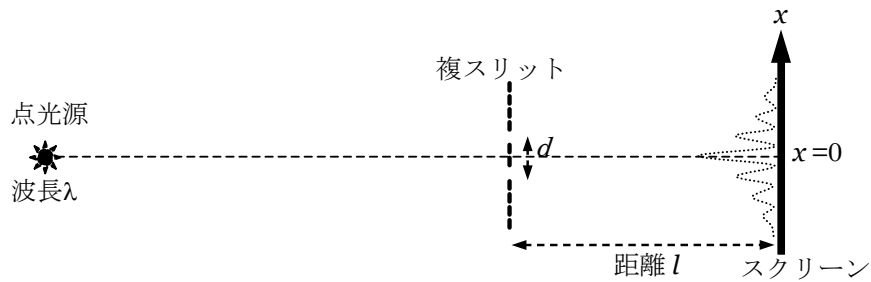


図 2

次に、図 3 のように複スリットから十分遠方に、明るさが同じである 2 つの点光源を置いた。このときスリット側から見た 2 つの点光源のなす角を α とする。ただし、角 α は微小で $\alpha \ll 1$ である。また光源の波長はどちらも同じ λ とする。スクリーンには点光源 1 および点光源 2 からの光が届く。はじめに、 $\alpha=0$ とすると、問 2 と同じ明暗の縞模様がスクリーンに現れていた。つぎに、角度 α を少しずつ増やしていくと、明暗の縞がはっきりしなくなった。

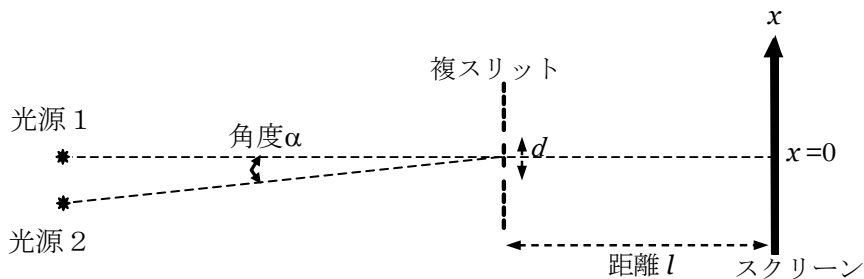
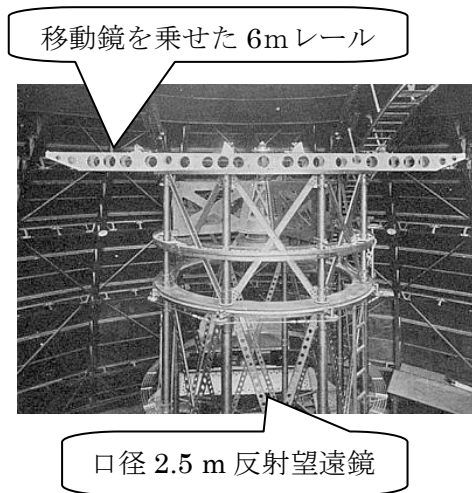


図 3

問 3 このとき、なぜ明暗がはっきりしなくなるのか、必要ならば図やグラフなどを用いて説明しなさい。また、明暗がはっきりしなくなったときの角度 α が $\alpha d = \lambda/2$ と表されることを示しなさい。

1920 年、マイケルソンとピーズらは光干渉を利用して、恒星の視直径を初めて測定した。彼らは天体望遠鏡（口径 2.5 m）の先端に図 4 のような長さ 6 m のレールを取り付け、レール上をなめらかに動く移動鏡 2 枚（鏡 1、鏡 2）とレールに固定された固定鏡 2 枚を用いて星からの光を鏡 1 と鏡 2 の 2 ヶ所から望遠鏡に取り入れ、望遠鏡の反射鏡により観測面に光を集めて星像を観察した。



著作権上の理由により掲載できません。

図4 マイケルソンの干渉計の写真（左），およびその概略図（右）

はじめに，移動鏡（鏡1と鏡2）の間隔 L を狭めて配置した。このとき鏡1，鏡2から入った光は観測面に集光されて点状の像になるが干渉により図5(a)のように明暗の縞模様が観測される。次に，鏡1，鏡2を動かして間隔 L を大きくすると，縞模様は図5(b)のように次第にはっきりしなくなり，間隔 L_0 のときには縞模様は図5(c)のようにほぼ消失した。マイケルソンらは，恒星は大きさのない点光源ではなく，地球から見て視直径 α の角度の範囲に光源が広がっているため，移動鏡の距離 L を大きくすると 図4にあるように，2つの鏡に光が到着するまでに道筋が最大 $L\alpha$ だけ異なるため，干渉が消失するものと考えた。

著作権上の理由により掲載できません。

図5 移動鏡の間隔 L を変えたときの観測面での星像の変化の様子。
 (a) L が小さいとき。(b) L を少し広げたとき。(c) さらに L を広げて，はじめて干渉縞が消失した $L=L_0$ のとき。

以下では、問3で行った解析をもう少し発展させて、視直径 α の広がりをもつ光源からの干渉について考えてみよう。なお、考察を簡素化するために、光源はスクリーンの x 軸に平行な直線状のものとして取り扱うことにする。

図6のように、十分遠方であって、視直径 α の範囲に直線状に並んだ無数の点光源から均一に波長 λ の光が發せられ、複スリットに届いているものとする。図6および拡大図7に示す角度 θ の方向（ただし $|\theta| \leq \alpha/2$ ）からやって来る光（電磁波）のうち、スリット A, B を通過した光のスクリーン上の位置 x における電場の強さをそれぞれ、 $E_{A,\theta}(x)$, $E_{B,\theta}(x)$ と表記する。光源から図7のようにスリット B を通ってスクリーン上の位置 x に届いた光の電場を $E_{B,\theta}(x) = \sin(\omega t - k l_B)$ と表すものとする。ここで、 l_A , l_B は各スリットと位置 x との距離、 ω は電磁波の角振動数、 $k=2\pi/\lambda$ である。

問4 このとき、もう一方のスリット A を通ってスクリーン上の位置 x に届いた光の電場 $E_{A,\theta}(x)$ を求めなさい。なお、光源とスリット A, B との距離は $d \sin \theta$ だけ異なっていることに注意しなさい。

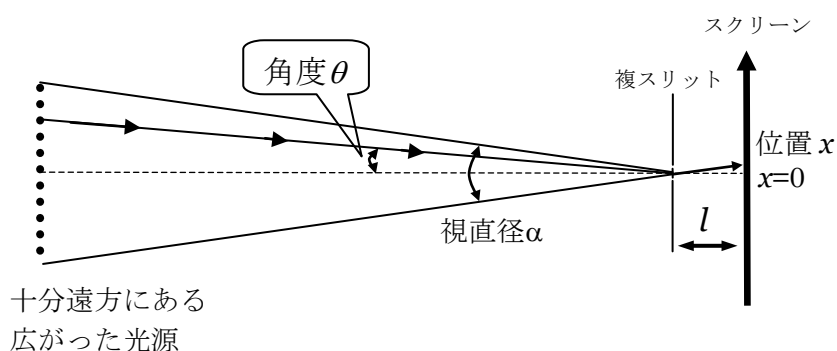


図6

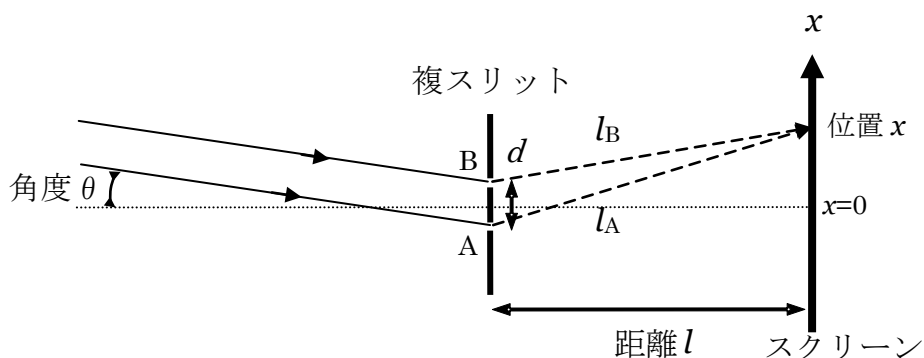


図7： 上図（図6）の複スリットおよびスクリーン付近の拡大図

問5 問4の結果をもとにして、角度 θ の方向から来て複スリットに入射した光のスクリーン上の位置 x での電場 $E_{A,\theta}(x) + E_{B,\theta}(x)$ が以下の式(1)

$$E_{A,\theta}(x) + E_{B,\theta}(x) \approx 2 \sin\left(\omega t - \frac{k}{2}(2l + \theta d)\right) \cos\left(\frac{kd}{2}\left(\frac{x}{l} + \theta\right)\right) \quad (1)$$

で表わされることを示しなさい。ただし、角度 θ は微小であるので $\sin\theta \approx \theta$ としてよい。また、スクリーン上の位置 x も原点付近だけを考えることとして、 $l_A + l_B \approx 2l$ と近似して計算しなさい。なお、必要なら三角関数の公式

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2 \sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

を用いてもよい。

問6 光の強度とは電場の二乗を時間的に平均した量である。問5の式(1)をもとにして、角度 θ の方向から来て複スリットに入射した光によるスクリーン上の位置 x での光の強度 $I_\theta(x)$ を求めなさい。

問7 視直径 α の広がりを持つ光源からの光が、複スリットを通過してスクリーン上の位置 x に作る光の強度は、問6で求めた光の強度 $I_\theta(x)$ を角度 θ について $-\alpha/2 \leq \theta \leq \alpha/2$ の範囲で積分することにより求めることができる。ただし、視直径 α の大きさによらず光量を一定にするために、積分結果を視直径 α で割算した、スクリーン上の位置 x における光の強度の分布

$$I(x) = \frac{1}{\alpha} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} I_\theta(x) d\theta$$

を求めなさい。

問8 問7で求めたスクリーン上の光の強度の分布 $I(x)$ を、視直径 α の値が 0 , $\frac{\lambda}{2d}$, $\frac{\lambda}{d}$ の3通りの場合についてグラフに書き、干渉による明暗の縞が消失する条件を求めなさい。必要なら、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を用いてもよい。

問 9 マイケルソンらはオリオン座のベテルギウスの視直径の観測に成功した。ベテルギウスの光の波長を $\lambda=570 \text{ nm}$ とする。図 4 の移動鏡の間隔を次第に広げていくと、 $L_0=3.0 \text{ m}$ のときに干渉縞がはじめて消失した。問 8 の結果を用いてベテルギウスの視直径[ラジアン]を有効数字 2 桁で求めなさい。

問 10 マイケルソンらによる光の干渉を用いた恒星の視直径の測定において、できるだけ小さな視直径の恒星を観測するためにはどのようにすれば良いか答えなさい。また、実際には様々な問題が生じることが予想される。どのような理由で視直径の観測が困難になると考えられるのか説明しなさい。

参考文献：

図の一部は Eugen Hecht 著 「ヘクト光学」 III 現代光学
(尾崎義治、朝倉利光訳) 丸善 より一部改修して転載。
天体干渉計の写真は G.E. Hale 著 The New Heavens より転載。

参考： 現代のハッブル宇宙望遠鏡や、すばる望遠鏡などの特別の工夫を施した高い分解能を誇る望遠鏡をもってしても、形状(視直径)が直接観測可能な星は、ベテルギウスなどの視直径の大きな恒星に限られている。一方で、1950 年代には干渉を用いた星の視直径の計測法が大きく進歩し、マイケルソンらが行ったベテルギウスの視直径の約 100 分の 1 の天体までも測定が可能となり、その観測結果は天文学の進歩に貢献している。