

平成 23 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述

実施時間 [9:00－17:00]

数学

(16:00－17:00)

注意事項

1. 以下の問題すべてに解答してください。
2. 教科書、ノートなどは一切参照してはいけません。
3. 携帯電話の電源を必ず切ってください。

1. 以下の設問に答えなさい。

(1) 次の式を有理化し、できるだけ簡単にしなさい。ただし、 $a > 0$ とする。

$$\frac{\sqrt{a+1}}{a+\sqrt{a+1}} - \frac{\sqrt{a-1}}{a-\sqrt{a+1}}$$

(2) $x = \frac{2+\sqrt{13}}{3}$ のとき、 $x - \frac{1}{x}$ および $x^2 + \frac{1}{x^2}$ の値を求めなさい。

(3) $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{3}{2}$ のとき、 $\frac{\tan \frac{\alpha - \beta}{2}}{\tan \frac{\alpha + \beta}{2}}$ の値を求めなさい。

(4) $a_n = a_1 r^{n-1}$, ($n=1, 2, \dots, 10$) と書ける数列 $\{a_n\}$ が

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_{10} &= 2 \\ \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{10}} &= 3 \end{aligned}$$

を満たすとき、積 $a_1 a_2 \dots a_{10}$ の値を求めなさい。

2. 曲線 C: $y = x^3$ について以下の問に答えなさい。

(i) 点 (α, α^3) ($\alpha < 0$) で曲線 C に接する直線を求めなさい。

(ii) (i) で求めた接線が曲線 C と交わる点の x 座標を求めなさい。

(iii) (i) で求めた接線と曲線 C が囲む領域の面積を求めなさい。

3. $f(x)$ は恒等的には 0 でない関数で、

$$2f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$$

を満たす。以下の問に答えなさい。

(i) $f(0)$ の値を求めなさい。

(ii) $f(-x)$ および $f(2x)$ を $f(x)$ を用いて表しなさい。

(iii) $f^2(x) + f^2(y) = f(x+y)f(x-y) + f(0)$ が成り立つことを証明しなさい。

4. 2次元平面内の直線に関する次の各問に答えなさい。

(i) 点 $\vec{r}_0 = (x_0, y_0)$ を通り、ベクトル $\vec{a} = (a, b)$ に垂直な直線 l 上の任意の点 $\vec{r} = (x, y)$ が $ax + by + c = 0$ の形の方程式を満たすことを示し、 c を求めなさい。

(ii) 点 $\vec{r}_1 = (x_1, y_1)$ から直線 l に下した垂線の長さを、ベクトル \vec{a} 、 \vec{r}_1 、 \vec{r}_0 を用いて表しなさい。