平成 24 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題 II-A　解答例

$\boxed{\textbf{II–A}}$ 解答例

問 1　(1) 微分すると

$$\vec{v}_{\mathrm{A}} = (-\ell\omega\sin\omega t, \ell\omega\cos\omega t)$$
$$\vec{a}_{\mathrm{A}} = (-\ell\omega^2\cos\omega t, -\ell\omega^2\sin\omega t) = -\omega^2\vec{r}_{\mathrm{A}}$$

(2) 重心から見て $\vec{v}_{\mathrm{B}} = -\vec{v}_{\mathrm{A}}$ であるから

$$\frac{1}{2}m\,|\vec{v_{\mathrm{A}}}|^2 + \frac{1}{2}m\,|\vec{v_{\mathrm{B}}}|^2 = m\,|\vec{v}_{\mathrm{A}}|^2 = m\{(-\ell\omega\sin\omega t)^2 + (\ell\omega\cos\omega t)^2\} = m\ell^2\omega^2$$

(3) 重心の速度を (1) に加える。加速度は (1) と変わらない。

$$小球\,\mathrm{A}\,の速度 = (V_x - \ell\omega\sin\omega t, V_y + \ell\omega\cos\omega t)$$
$$小球\,\mathrm{A}\,の加速度 = (-\ell\omega^2\cos\omega t, -\ell\omega^2\sin\omega t)$$

問 2　(1) $\vec{v}_{\mathrm{A}} = \vec{V} + \frac{1}{2}\vec{v}$, $\vec{v}_{\mathrm{B}} = \vec{V} - \frac{1}{2}\vec{v}$ である。

(2) 上式を題意の式に代入して整理すれば

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2}\left(|\vec{v_{\mathrm{A}}}|^2 + |\vec{v_{\mathrm{B}}}|^2\right) \\ &= \frac{m}{2}\left(\left|\vec{V} + \frac{1}{2}\vec{v}\right|^2 + \left|\vec{V} - \frac{1}{2}\vec{v}\right|^2\right) \\ &= \cdots 計算略 \cdots \\ &= m\left|\vec{V}\right|^2 + \frac{m}{4}\,|\vec{v}|^2 \end{aligned}$$

よって $M = 2m$, $\mu = m/2$ である。

(3) $|\vec{v}|^2 = |\vec{v}_{\mathrm{A}} - \vec{v}_{\mathrm{B}}|^2 = \{\omega(2\ell)\}^2 = 4\omega^2\ell^2$. (B から見れば，A は，半径 2ℓ，角速度 ω で回転している。)

問 3　(1) 初速度を与えた瞬間において，B の初速度は 0，A の初速度は y 軸正方向に v_0 だから，重心は y 軸正方向に速度 $v_0/2$ で運動する。それ以後 外力は働かないから，この系の重心は y 軸正方向に 速度 $v = v_0/2$ で等速直線運動する。すなわち $(X, Y) = (0, v_0t/2)$.

(2) 重心から見ると，A は速度 $v_0/2$ で半径 ℓ の回転運動をしているから，角速度は $\omega = v_0/(2\ell)$ である。

(3) $(x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{A}}) = (\ell\cos\omega t, v_0t/2 + \ell\sin\omega t)$.

問 4　(1) x 軸方向には外力は働かないから，この棒の重心は，常に z 軸上にある。小球 A の座標を $(x_{\mathrm{A}}, z_{\mathrm{A}})$，小球 B の座標を $(x_{\mathrm{B}}, z_{\mathrm{B}})$ とすれば，

$$x_{\mathrm{A}} = \ell\sin\theta, \quad z_{\mathrm{A}} = 2\ell\cos\theta$$
$$x_{\mathrm{B}} = -\ell\sin\theta, \quad z_{\mathrm{B}} = 0$$

である。

(2) z 軸上を落下運動する。

(3) (1) の結果より θ を消去して，軌道の方程式

$$x_{\mathrm{A}}^2 + \frac{z_{\mathrm{A}}^2}{4} = \ell^2$$

を得る。これは，中心が座標軸の原点，短軸半径 ℓ，長軸半径 2ℓ の楕円である。この楕円の第 1 象限の部分が小球 A の軌跡である。

(4) 位置エネルギーは $2mgl\cos\theta$.

(5) 運動エネルギーは，小球 A と 小球 B の寄与を加えて，

$$\frac{1}{2}m\Big(\frac{\mathrm{d}x_{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}t}\Big)^2 + \frac{1}{2}m\Big(\frac{\mathrm{d}z_{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}t}\Big)^2 + \frac{1}{2}m\Big(-\frac{\mathrm{d}x_{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}t}\Big)^2$$

これに

$$\frac{\mathrm{d}x_{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}t} = \ell\cos\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}, \quad \frac{\mathrm{d}z_{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}t} = -2\ell\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

を代入して整理すれば，運動エネルギーは

$$m\ell^2(1+\sin^2\theta)\Big(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\Big)^2$$

となる。

(6) エネルギー保存則より

$$2mgl = 2mgl\cos\theta + m\ell^2(1+\sin^2\theta)\Big(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\Big)^2$$

これより

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2g}{\ell}\frac{1-\cos\theta}{1+\sin^2\theta}}$$

となる。

(7) 上式に $\theta = \pi/2$ を代入すれば，

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \sqrt{g/\ell}$$

であり，また速度の式を用いて

$$\frac{\mathrm{d}z_{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}t} = -2\ell\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\sin\theta = -2\sqrt{g\ell}$$

となる。すなわち，z 軸負方向に $2\sqrt{g\ell}$ の速さで衝突する。

(8) 運動の時間反転対称性により，小球 A はもとの位置まで上昇する。