

平成 24 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題 II-B 解答例

II-B 解答例

出題意図：気体の状態方程式，熱力学第一法則などの理解度を調べる。教科書で簡単に触れられている水の状態変化についての設問も加えた。また，グラフを作成したり，電卓を使って方程式の解の近似値を求めたりすることができるかどうかについても検査できる問題にした。

問1 (1) $m_W = 1.80 \times 10^{-2} \text{kg}$

(2) $\rho_W S h_0 = n_W m_W$ より

$$h_0 = \frac{n_W m_W}{\rho_W S}$$

(3) $p_0 S h_1 = n_0 R T_0$ より

$$h_1 = \frac{n_0 R T_0}{p_0 S}$$

問2 (1) ピストンが Δh だけ持ちあがったとすると

$$W = p_0 S \Delta h = n_0 R (T_1 - T_0)$$

(2) 気体が水から得た熱が気体の内部エネルギー増加と外部にした仕事に使われるから，

$$Q = n_0 C_V (T_1 - T_0) + W$$

前問の結果を用いると $Q = n_0 (C_V + R) (T_1 - T_0)$

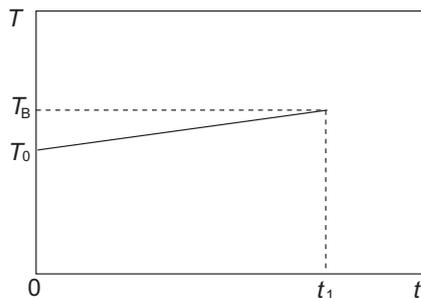
(3) 加熱開始後，時間 t の間にヒーターから加えられる熱量は qt ，これが水および気体の内部エネルギー増加と気体がした仕事になるから

$$qt = n_W C_W (T - T_0) + n_0 (C_V + R) (T - T_0)$$

よって

$$T = T_0 + \frac{qt}{n_W C_W + n_0 (C_V + R)}$$

水温変化のグラフは以下のようなになる。



(4) 前問で $T = T_B$ とおいて t を求めることにより,

$$t_1 = \frac{1}{q} [n_W C_W + n_0 (C_V + R)] (T_B - T_0)$$

問3 (1) 1モル蒸発させるのに L_0 の熱量が必要だから

$$t_2 = t_1 + \frac{n_W L_0}{q}$$

(2) n_W モルの水が水蒸気になることによるピストンの高さの変化 $\Delta h'$ は, 高さ h_0 までの部分を占めていた水がすべて蒸発することを考慮すると

$$\Delta h' = \frac{n_W R T_B}{p_0 S} - h_0$$

したがって, ピストンがする仕事は

$$W_B = p_0 S \Delta h' = n_W R T_B - \frac{p_0}{\rho_W} n_W m_W$$

問4 各温度での $\log_{10}(T/T_B)$, $\log_{10}(p_A/p_0)$ を計算すると

T/T_B	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6
$\log_{10}(T/T_B)$	-0.097	0.0	0.079	0.146	0.204
$\log_{10}(p_A/p_0)$	-1.45	0.0	0.97	1.66	2.18

グラフはグラフ用紙に記入した。

問5 (1) 問1より

$$\frac{h_1}{h_0} = \frac{n_0 \rho_W R T_0}{n_W p_0 m_W} = \frac{1}{10} \frac{1.0 \times 10^3 \times 0.8 \times 373}{1.013 \times 10^5 \times 0.018} \times 8.314 = 136$$

(2) 気体の温度 T と圧力 p の関係は, $p_0 S h_1 = n_0 R T_0$, $p S h_1 = n_0 R T$ より

$$\frac{p}{p_0} = \frac{T}{T_0}$$

$$\log_{10} \frac{p}{p_0} = \log_{10} \frac{T}{T_0} = \log_{10} \frac{T}{T_B} + \log_{10} \frac{T_B}{T_0} = \log_{10} \frac{T}{T_B} + \log_{10} \frac{1.0}{0.8}$$

したがって

$$\log_{10} \frac{p}{p_0} = \log_{10} \frac{T}{T_B} + 0.097$$

このグラフもグラフ用紙に記入した。

(3) $p = p_A$ より

$$\log_{10} \frac{T}{T_B} + 0.097 = -5.80 \left(\frac{T_B}{T} - 1 \right)$$

グラフより、この解（グラフの交点）は $T = T_B$ に近いから $x = \delta T_B / T_B$ とおくと $|x| \ll 1$ 。このとき、 $\log_e(1+x) \simeq x$ だから

$$\text{左辺} = \log_{10}(1+x) + 0.097 \simeq \frac{x}{\log_e 10} + 0.097 = 0.434x + 0.097$$

$$\text{右辺} = -5.80 \left(\frac{1}{1+x} - 1 \right) \simeq -5.80(1-x-1) = 5.80x$$

左辺=右辺より $0.434x + 0.097 = 5.80x$ これを解くと

$$x = \frac{0.097}{5.366} = 0.018$$

$$\delta T_B = T_B \times x = 373 \times 0.018 = 6.7\text{K} \simeq 7\text{K}$$

- (4) 水の一部が蒸発すると気体部のモル数が増える。水の体積は気体部の体積の1%以下なので水が蒸発して液体部の体積が減少することによる気体部の体積増加は無視でき、蒸発によって気体部のモル数が増えた分だけ圧力が増える。このため、同じ温度で蒸発がない場合に比べて圧力が高くなる。この圧力と温度の関係をグラフ用紙に点線で記入した。
- (5) 水が沸騰すると気体部の圧力が上昇し、沸点が高くなる。加熱が続いているため水はさらに蒸発して圧力、沸点ともに高くなる。このようにして問4の曲線に沿って温度、圧力が上昇していく。
- (6) 水が蒸発し終わったとき

$$(n_0 + n_W)RT'_2 = p'_2 Sh$$

他方

$$n_0 RT_0 = p_0 Sh_1$$

したがって

$$\frac{n_0 + n_W}{n_0} \frac{T'_2}{T_0} = \frac{p'_2}{p_0} \frac{h}{h_1}$$

$$n_W/n_0 = 10, \quad h_1/h_0 = 136 \text{ より}$$

$$\frac{p'_2}{p_0} = \frac{136}{137} \times 11 \frac{T'_2}{T_0} = 10.9 \frac{T'_2}{T_0}$$

よって

$$\log_{10} \frac{p'_2}{p_0} = \log_{10} \frac{T'_2}{T_B} + \log_{10} \frac{T_B}{T_0} + \log_{10} 10.9 = \log_{10} \frac{T'_2}{T_B} + 1.134$$

$p'_2 = p_A$ より

$$\log_{10} \frac{T'_2}{T_B} + 1.134 = -5.80 \left(\frac{T_B}{T'_2} - 1 \right)$$

グラフより、この解は $\log_{10}(T'_2/T_B) \simeq 0.1$ したがって $T'_2/T_B \simeq 1.26$ 付近にあることがわかる。 T'_2/T_B の値が 1.25, 1.26, 1.27, 1.28 の場合を調べてみると

T'_2/T_B	1.25	1.26	1.27	1.28
$\log_{10}(p'_2/p_0)$	1.231	1.234	1.238	1.241
$\log_{10}(p_A/p_0)$	1.16	1.20	1.23	1.27

これより $T'_2/T_B = 1.27 \pm 0.01$, $\log_{10}(p'_2/p_0) = 1.24 \pm 0.01$

問6 (1) 水が全て蒸発した後の圧力 p' と温度 T' の関係は

$$p'Sh = (n_0 + n_W)RT'$$

他方

$$p'_2Sh = (n_0 + n_W)RT'_2$$

だから

$$\frac{p'}{p'_2} = \frac{T'}{T'_2}$$

これより

$$\frac{p'}{p'_2} = \frac{1.50T_B}{1.27T_B} = 1.18$$

したがって

$$\log_{10}\left(\frac{p'}{p_0}\right) = \log_{10} 1.18 \frac{p'_2}{p_0} = \log_{10} 1.18 + 1.24 = 1.31$$

(2) 断熱膨張中は $pV^\gamma = \text{一定}$ より $p^{1-\gamma}T^\gamma = \text{一定}$, よって

$$p \propto T^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$\gamma = 4/3$ のとき, $p \propto T^4$. この関係をグラフにした。

(3) 前問より

$$\log_{10} \frac{p}{p'} = 4 \log_{10} \frac{T}{T'}$$

よって

$$\log_{10} \frac{p}{p_0} - \log_{10} \frac{p'}{p_0} = 4 \left(\log_{10} \frac{T}{T_B} - \log_{10} \frac{T'}{T_B} \right)$$

p', T' の値を代入すると

$$\log_{10} \frac{p}{p_0} = 4 \log_{10} \frac{T}{T_B} + 0.61$$

グラフより $\log_{10}(T/T_B) \simeq 0.08$ だから $T/T_B \simeq 1.2$ 程度。そこで, $T/T_B = 1.17, 1.18, 1.19, 1.20$ の場合を調べると

T/T_B	1.17	1.18	1.19	1.20
$\log_{10}(p/p_0)$	0.883	0.898	0.912	0.927
$\log_{10}(p_A/p_0)$	0.843	0.885	0.926	0.966

したがって, $1.18 < T_3/T_B < 1.19$. よって $440\text{K} < T_3 < 444\text{K}$. $T_3 \simeq 442\text{K}$.

