平成 24 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

# 課題 II-C　解答例

# $\boxed{\text{II}-\text{C}}$ 解答例

［問１］

短い時間 $\Delta t$ に $\Delta M$ の推進剤を噴射し，噴射方向とは反対向きに速さ $\Delta v$ 変化したと考えると，運動量保存則から

$$M\Delta v = \Delta M u$$

$$\Delta v = \frac{\Delta M u}{M}$$

$$F = \frac{M\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta M}{\Delta t}u$$

［問２］

（１） $n$ 回目までの噴射量は

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta M_k = \sum_{k=1}^{n} M_0 (1-s)^{k-1} s = M_0 \frac{1-(1-s)^n}{1-(1-s)} s = M_0 \{1-(1-s)^n\}$$

（２） $n$ 回目噴射時の運動量保存則は

$$\{M_0 - M_0 \{1-(1-s)^n\}\} \Delta v_n = M_0 (1-s)^{n-1} s \cdot u$$

$$\Delta v_n = \frac{s}{1-s}u$$

（３）ロケットの質量が $M_0 \cdot r$ となる，すなわち $M_0 \cdot (1-r)$ 燃料を噴射するまでに必要な燃料の噴射回数は， $n$ 回目までの噴射量から

$$M_0 (1-r) = M_0 \{1-(1-s)^n\}$$

$$r = (1-s)^n$$

$$n = \log_{1-s} r = \frac{\log_e r}{\log_e (1-s)}$$

（４）

$$v = \sum_{k=1}^{n} \Delta v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{s}{1-s}u = \frac{s}{1-s}un = \frac{s}{1-s}u \frac{\log_e r}{\log_e (1-s)}$$

（５）

$$v = \lim_{s \to 0} \frac{s}{1-s} u \frac{\log_e r}{\log_e (1-s)} = -u \log_e r$$

［問３］

（１）

電極 A，B の間では電界の強度が $V/L$，従って加わる力は $Ve/L$

従って $a_x = \dfrac{Ve}{Lm}$

（２）

$t$ 秒後の速度と位置は

$$v_x = v_0 \cos\theta_0 + \frac{Ve}{Lm} t \fallingdotseq v_0 + \frac{Ve}{Lm} t$$

$$v_y = v_0 \sin\theta_0 \fallingdotseq v_0\theta_0$$

$$x \fallingdotseq v_0 t + \frac{Ve}{2Lm} t^2$$

$$y \fallingdotseq v_0\theta_0 t + y_{\mathrm{A}0}$$

（３）

$x = L$ となるときの $t$ を求める

$$x \fallingdotseq v_0 t + \frac{Ve}{2Lm} t^2 = L$$

$$t = \frac{-v_0 \pm \sqrt{{v_0}^2 + 2\frac{Ve}{m}}}{\frac{Ve}{Lm}}$$

正になるはずなので

$$t = \frac{-v_0 + \sqrt{{v_0}^2 + 2\frac{Ve}{m}}}{\frac{Ve}{Lm}}$$

代入して

$$y_B = v_0\theta_0 \frac{-v_0 + \sqrt{{v_0}^2 + 2\frac{Ve}{m}}}{\frac{Ve}{Lm}} + y_{A0}$$

$v_{Bx}$ は

$$v_{Bx} = v_0 + \frac{Ve}{Lm} \frac{-v_0 + \sqrt{{v_0}^2 + 2\frac{Ve}{m}}}{\frac{Ve}{Lm}} = \sqrt{{v_0}^2 + 2\frac{Ve}{m}}$$

［問４］

問３より

$$y_B = v_0\theta_0 \frac{-v_0 + \sqrt{{v_0}^2 + 2\frac{Ve}{m}}}{\frac{Ve}{Lm}} + y_{A0}$$

スリットを通る条件は

$$-l < y_B = v_0\theta_0 \frac{-v_0 + \sqrt{{v_0}^2 + 2\frac{Ve}{m}}}{\frac{Ve}{Lm}} + y_{A0} < l$$

$$-l + y_{A0} < -v_0 \frac{-v_0 + \sqrt{{v_0}^2 + 2\frac{Ve}{m}}}{\frac{Ve}{Lm}}\theta_0 < l + y_{A0}$$

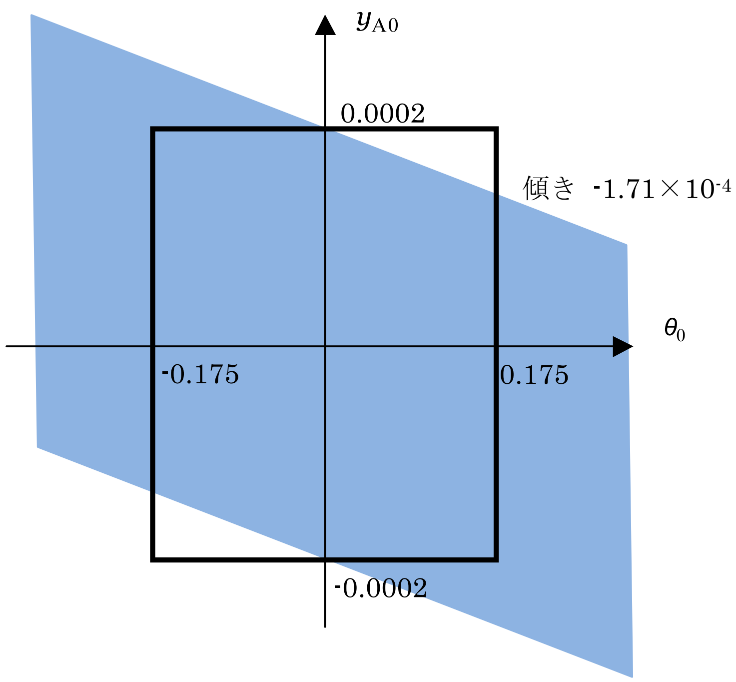
値を入れて計算すると

$y_{A0} - 0.0002 < -1.71\times10^{-4}\theta_0 < y_{A0} + 0.0002$

$\theta_0$ を横軸，$y_{A0}$ を縦軸として上記の範囲を図示すると網掛けの範囲。

これに対して，入射するイオンの範囲は図中の太線の枠内

この枠内の面積に対する網掛け部分の割合がスリットを通るイオンの割合となる。




全体の面積 $A$＝$0.175\times2\times0.0002\times2$

網掛けのない部分の面積 $B$＝$2\times\frac{1}{2}\times1.71\times10^{-4}\times0.175\times0.175$

$B/A = 0.0374$
従って通過する割合は0.9626
四捨五入して0.96

［問５］
問３より
電極 B に衝突しないでスリットを通るキセノンイオンの $x$ 軸方向への速さ $v_{Bx}$ は $\theta_0$ に依存しない（ $\cos\theta_0 \fallingdotseq 1$ と近似している）ので，実際の値を入れて計算すると
$v_{Bx} = 46.7\mathrm{km/s}$
電極 B にあたったキセノンイオンは推力に影響しないことから，速さの平均値 $\overline{v_{Bx}}$ は
$\overline{v_{Bx}} = 46.7\times0.9626+0\times0.0374 \fallingdotseq 44.9$
問２より $v = -u\log r$
速さの平均値 $\overline{v_{Bx}} = u = 44.9\mathrm{km/s}$
全質量のうち20%を使うので，値をいれて
$v = -44.9\log 0.8 \fallingdotseq 10019\mathrm{m/s}$
四捨五入して
$v \fallingdotseq 10\mathrm{km/s}$

［問６］
問１から
$$F = \frac{\Delta M}{\Delta t}u = 250\times10^{-9}\times44900 \fallingdotseq 0.0113$$
四捨五入して11mN

［問７］
イオンエンジンは推進剤を高速に噴射するため，少ない燃料で高速に加速できる。しかし，単位時間における推進剤の使用量が小さい。その結果推力が小さいため地上では浮上できない。しかし，無重力空間では加速に時間がかかっても問題ないため，少ない推進剤でより効率的に加速できるイオンエンジンが使われる。