平成 25 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述

課題[II-A], [II-B], [II-C]

（ 10:00－15:30 ）

注意事項

課題 II には、[II-A]、[II-B]、[II-C]の 3 題があります。

志望するコースによって、次に示す問題を解答してください。

- 物理学コース：
  [II-A]、[II-B]の２題を解答してください。
- フロンティアテクノロジーコース：
  [II-A]、[II-B]、[II-C]の中から２題を選択して解答してください。

$\boxed{\textbf{II-A}}$

質量 m の小球を長さ ℓ の糸でつり下げ振動させる単振り子は，振幅が小さければ，周期

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \tag{i}$$

で単振動する。g は重力加速度の大きさである。しかしこの単振り子は，振幅が大きくなると，周期がこの値からずれてくることが知られている。では，振幅の大きさによらず周期が一定の振り子，すなわち大きく振れても小さく振れても周期が変わらない振り子を作ることは可能だろうか。空気抵抗やまさつは無視できるとして，次の各問いに答えなさい。

（数学公式） 必要なら以下の公式を用いてよい。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\cos\theta = -\sin\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta = \cos\theta$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos\theta = -\sin\theta\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin\theta = \cos\theta\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$|\theta|$ が十分小さいとき，次の近似式が成り立つ。

$$\sin\theta \fallingdotseq \theta - \frac{1}{3!}\theta^3, \qquad \cos\theta \fallingdotseq 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4$$

問 1 まず，フックの法則に従う理想的なばねを考えよう。図 1 のように，ばね定数 k，自然長 ℓ_0 の軽いばねをなめらかな水平面上に置き，その一端を壁につなぎ，他端を質量 m の小球につなぐ。小球を水平面上で引っ張り，ばねを自然長から A だけ伸ばして静かに手を離すときの小球の運動を考える。

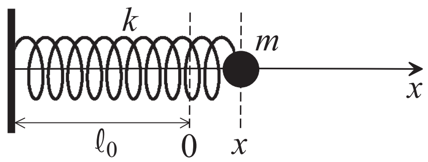

図 1: 水平面上方から見たばねの振動

(1) ばねが自然長のときの小球の位置を原点として，小球の位置を x，速度を $v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，加速度を $a = \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$ とするとき，小球の運動方程式を書きなさい。

(2) x, v, a を時刻 t の関数として表しなさい。手を離す瞬間を $t = 0$ とする。

(3) ばねと小球についての力学的エネルギー保存を表す式を求めなさい。

(4) 小球の振動の周期 T を求め，それが振幅 A に依存しないことを示しなさい。

このように，運動方程式が上問 (1) の結果の式のように書ける場合，あるいはエネルギー保存の式が上問 (3) の結果の式のように書ける場合，振動の周期は振幅に依存しないことが分かる。

問 2 現実のばねは，伸びが大きくなるとフックの法則には従わなくなる。ばねの伸び x の 3 乗に比例する小さな補正項が加わり，弾性力が

$$f = -kx - px^3 \qquad (p:\ \text{正または負の定数}) \tag{ii}$$

と表されるばねを考えよう。このばねを用いて図 1 と同様のばね振り子を作り，前問 1 と同じ振幅 A で振動させる。ただし，補正項は十分小さく，ばねの振動が不安定化することはない。

(1) フックの法則に従うばねが x だけ伸びたとき，ばねの位置エネルギー（弾性エネルギー）は

$$U = \frac{1}{2}kx^2 \tag{iii}$$

と与えられる。式 (ii) のばねの位置エネルギー U を x の関数として求めなさい。

(2) ばねの位置エネルギー U を，横軸を x として図に描きなさい。補正項がない場合，$p > 0$ の補正項がある場合，$p < 0$ の補正項がある場合について，その差が分かるように描くこと。

(3) 補正項が加わると，ばねの振動の周期は増えるか減るか，理由を付して答えなさい。ただし振幅は，問 1 と同じ A とする。また，このばね振り子の周期は振幅の大きさに依存するが，その理由を簡単に説明しなさい。

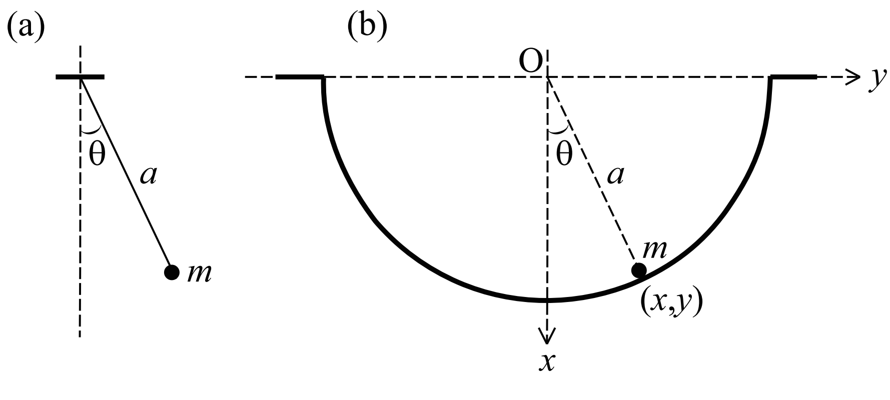

図 2: (a) 単振り子と (b) 半円に束縛された小球

問 3 図 2(a) のような，小球の質量 m，糸の長さ a の単振り子は，図 2(b) のような，鉛直面内のなめらかな半円（半径 a）に質量 m の小球が束縛され，振動している系と等価である。媒介変数 θ $(-\pi/2 < \theta < \pi/2)$ を導入すると，小球の位置は $(x, y) = (a\cos\theta, a\sin\theta)$ と表される。

(1) 小球の速度 (v_x, v_y) を，θ とその時間微分 $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ を用いて表しなさい。

(2) 小球の運動エネルギー K を求め，それを $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ を用いて表しなさい。

(3) 小球の位置エネルギー U を求め，それを θ を用いて表しなさい。半円の最下点を位置エネルギーの原点とする。

(4) 振り子が最大に振れたときの角度 θ を θ_{m} として，力学的エネルギーの保存を表す式を求めなさい。

(5) 振幅が十分小さいとき，力学的エネルギー保存の法則の近似式を導き，振動の周期 T を求めなさい。

(6) 振幅が大きくなると振動の周期は長くなるか短くなるか答えなさい。またそう考える理由を，問 2 を参考にして，θ の関数として U の図を描き説明しなさい。

問 4 図 3 のように，θ $(-\pi/2 < \theta < \pi/2)$ を媒介変数として式

$$
\begin{aligned}
x &= a(2\theta + \sin 2\theta) \\
y &= a(1 - \cos 2\theta) \qquad \text{(iv)}
\end{aligned}
$$

で定義されるサイクロイド曲線に，質量 m の小球が束縛され，振動している。θ は，点 $\mathrm{P}(x, y)$ におけるサイクロイド曲線の接線が x 軸となす角であり，a は正の定数である。

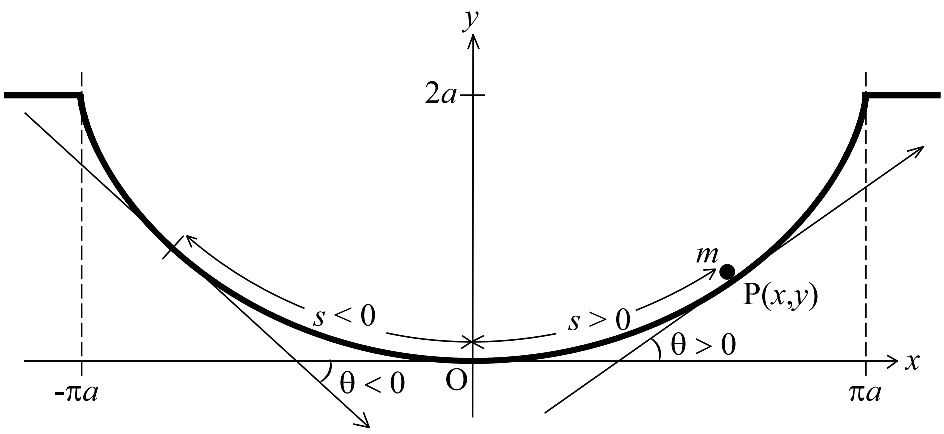

図 3: サイクロイド曲線に束縛された小球

(1) 小球の速度 (v_x, v_y) を，θ とその時間微分 $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ を用いて表しなさい。

(2) 小球の運動エネルギー K を求め，それを θ と $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ を用いて表しなさい。

(3) 小球の位置エネルギー U を求め，それを θ を用いて表しなさい。座標軸の原点を位置エネルギーの原点とする。

(4) 原点 O からサイクロイド曲線に沿って測った小球の位置 s は

$$s = 4a\sin\theta \tag{v}$$

と表されることを示しなさい。ただし，媒介変数 θ で表示された曲線の $\theta = \theta_1$ から $\theta = \theta_2$ までの長さ s は

$$s = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta \tag{vi}$$

で与えられる。

(5) 力学的エネルギーの保存を表す式を求め，それを s およびその時間微分 $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ を用いて表しなさい。小球の原点からの最大移動距離を s_{m} とする。

(6) 振動の周期 T を求め，それが振幅（すなわち s_{m}）に依存しないことを示しなさい。

この問題では，曲線に小球を束縛することで周期が振幅に依存しない振り子を実現したが，工夫することにより，小球を糸でつるして振動させるという形でも，これを実現できることが知られている（ホイヘンス振り子）。

II-B

電気と磁気について以下の問いに答えなさい。重力の影響は考えなくて良い。解答では，静電気力に関するクーロンの法則の比例定数を k_{e}，磁気力に関するクーロンの法則の比例定数を k_{m}，透磁率を μ としなさい。電位の基準点は無限遠にとるものとする。また，必要ならば以下の近似式を用いなさい。

$$|x| \ll 1 \text{ のとき} \qquad (1+x)^p \fallingdotseq 1 + px + \frac{p(p-1)}{2}x^2 \quad (p \text{ は有理数})$$

問 1　導体のそばに置かれた電荷について考える。図 1 のように，接地された十分広い導体板から距離 a だけ離れた点に電荷 $+q\,(q>0)$ の点電荷を置く。導体板の表面を xy 面にとり（y 軸の正の方向は紙面の表から裏へ向かう方向である），点電荷の位置の座標を $(0,0,a)$ とする。このとき導体板の表面には静電誘導によって電荷が現れる。

(1) 導体板に出入りする電気力線は導体板の表面に垂直になる。この理由を説明しなさい。

図 1 の $z>0$ の領域の電場は，点電荷 $+q$ が作る電場と導体板表面に誘導された電荷が作る電場を重ね合わせたものであるが，その様子は，図 2 のように導体板を取り除いて点 $(0,0,-a)$ にある大きさの点電荷 X を置くことで完全に再現できる。

(2) 点電荷 X の電荷を答えなさい。

(3) xz 面の $z>0$ の領域の電気力線の様子を図示しなさい。

(4) 図 1 の点電荷 $+q$ は，導体板表面に誘導された電荷が作る電場から力を受ける。この力の大きさと向きを答えなさい。

電場中に置かれた電荷は静電気力による位置エネルギーをもつが，このエネルギーは電場が空間に蓄えているエネルギー（静電エネルギー）であると考えることもできる。点電荷や導体が n 個空間に置かれているとき，k 番目の点電荷または導体の電荷を q_k，それが置かれている位置の電

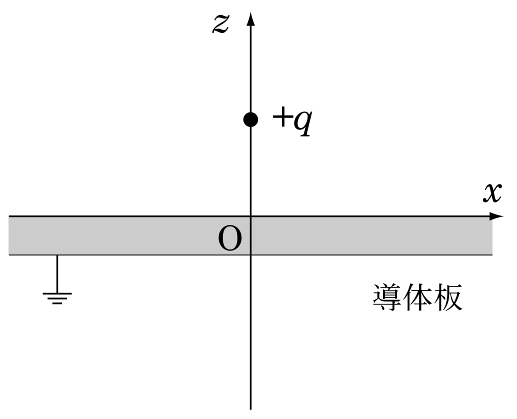

図1

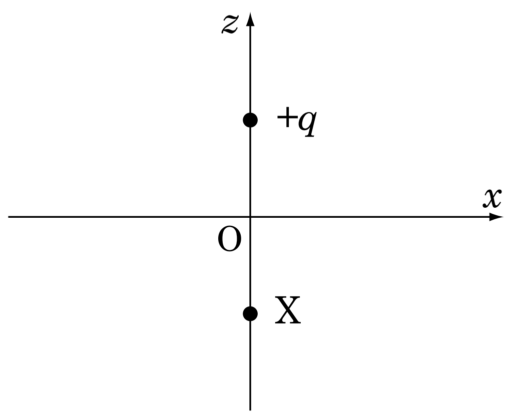

図2

位を V_k とすると，静電エネルギー U は

$$U = \frac{1}{2}\left(q_1V_1 + q_2V_2 + \cdots + q_nV_n\right)$$

と表される。

(5) 図１の導体板表面に誘導された電荷が作る電場について，点電荷 $+q$ の位置の電位を答えなさい。また，このとき電場が蓄えている静電エネルギーを答えなさい。

次に，図３のように，電荷 $+q$ と $-q$ の２つの点電荷を長さ d の絶縁体棒の両端に固定し，棒の中心を点 $(0, 0, a)$ に固定する。ただし，$d \ll a$ である。２つの点電荷は常に xz 面上にあり，棒は xz 面内で回転できる。棒と z 軸のなす角を θ とする。このとき $z > 0$ の領域の電場の様子は，図２と同様に導体板を取り除いて $z < 0$ の領域に点電荷を置くことで完全に再現できる。

(6) どのように点電荷を置けばよいか答えなさい。

(7) 導体板表面に誘導された電荷が作る電場について，２つの点電荷の位置の電位を角度 θ の関数としてそれぞれ求めなさい。また，このとき電場が蓄えている静電エネルギーを答えなさい。ただし，２つの点電荷の間に働く電気力による静電エネルギーはつねに一定なので，除いて良い。

(8) 棒がどの向きに向いているときに **(7)** の静電エネルギーが最小になるか答えなさい。ここでは，$d \ll a$ であることを用い，微少量 $\dfrac{d}{a}$ の２次まで考慮して近似計算しなさい。

(9) 距離 a を変えたときに **(7)** の静電エネルギーがどのように変わるかを考え，棒の固定をはずして自由に動けるようにしたときに，棒（と２つの電荷）が導体板に引き寄せられるかそれとも反発されるか，答えなさい。

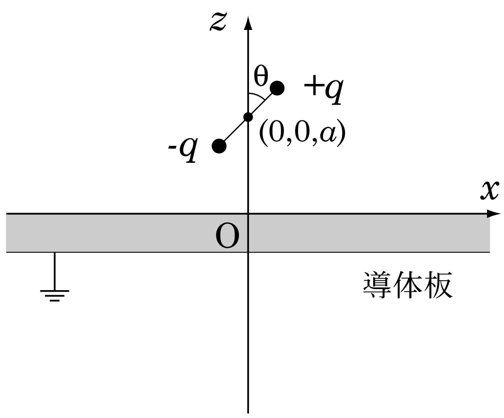

図3

問 2　超伝導体のそばに置かれた電流や磁極について考える。磁場中に超伝導体を置くと，超伝導体内部の磁場を打ち消すように超伝導体の表面に電流が流れ，その結果，超伝導体の内部には磁場はなく，磁力線は超伝導体の表面に平行になる。超伝導体のこの性質はマイスナー効果とよばれる。

まず，図 4 のように，十分広い超伝導体板から距離 a だけ離して直線電流 I を y 軸の正の方向に流す。ここでは，超伝導体板の表面を xy 面にとり（y 軸の正の方向は紙面の表から裏へ向かう方向である），電流は点 $(0, 0, a)$ を通っているものとする。このとき，$z > 0$ の領域の磁場は，直線電流 I が作る磁場と超伝導体表面を流れる電流が作る磁場を重ねあわせたものであるが，その様子は，超伝導体板を取り除いて $z < 0$ の領域に別の直線電流を流すことで完全に再現できる。

(1) 直線電流をどのように流せばよいか答えなさい。

(2) x 軸上の点 $(x, 0, 0)$ での磁場の x 成分，y 成分，z 成分を答えなさい。

(3) 図 4 の直線電流に働く力の向きと大きさを答えなさい。

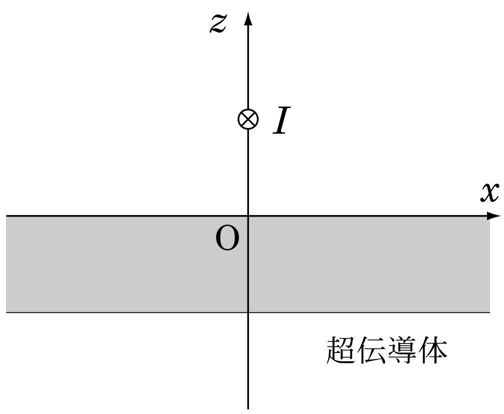

図4

磁気力に関するクーロンの法則は，数式の上では静電気力のクーロンの法則と全く同じ形をしており，静電気力について位置エネルギーを考えたのと同様に磁気力についても位置エネルギーを考えることができる。さらに，この位置エネルギーを磁場が空間に蓄える磁気エネルギーと考えることもできる。

(4) 2つの磁極 m_1 と m_2 が距離 r だけ隔てて置かれているとき，磁極 m_1 がもつ位置エネルギーを答えなさい。

図5のように，磁極の強さ $\pm m\,(m>0)$，長さ d の棒磁石の中心を超伝導体板から距離 a だけ離れた点 $(0,0,a)$ に固定する。ただし，$d \ll a$ である。2つの磁極は常に xz 面上にあり，棒磁石は xz 面内で回転できる。棒磁石と z 軸のなす角を θ とする。このとき，$z>0$ の領域の磁場は，棒磁石が作る磁場と超伝導体表面を流れる電流が作る磁場を重ねあわせたものであるが，その様子は，超伝導体板を取り除いて $z<0$ の領域に別の磁極を置くことで完全に再現できる。

(5) どのように磁極を置けばよいか答えなさい。

(6) このとき磁場が蓄えている磁気エネルギーを角度 θ の関数として求めなさい。ただし，2つの磁極の間に働く磁気力による磁気エネルギーはつねに一定なので，除いて良い。

(7) 棒磁石がどの向きに向いているときに **(6)** の磁気エネルギーが最小になるか答えなさい。ここでは，$d \ll a$ であることを用い，微少量 $\dfrac{d}{a}$ の2次まで考慮して近似計算しなさい。

(8) 距離 a を変えたときに **(6)** の磁気エネルギーがどのように変わるかを考え，棒磁石の固定をはずして自由に動けるようにしたときに，棒磁石が超伝導体板に引き寄せられるかそれとも反発されるか，答えなさい。

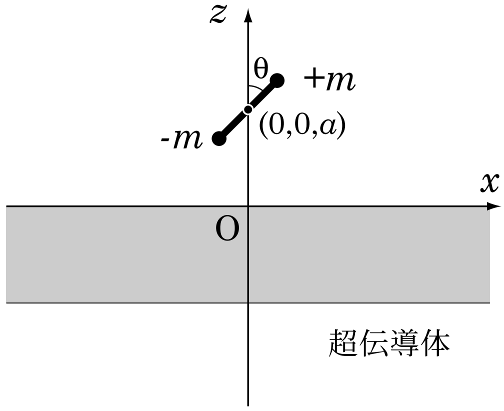

図5

II-C

作図問題とは，直線を引くことのできる定規と，円を描くことができるコンパスだけを有限回適用して描ける図形の性質を調べる問題である。作図問題では長さの目盛がない定規を使用する。作図問題における定規とコンパスの操作は，次の作図公理にまとめることができる。

定規とコンパスによる作図公理

a. 平面上の 2 点に対し，それらを通る直線を引く。

b. 既知の 1 点を中心とし，それ以外の既知の点を通るような円を描く。

c. 互いに平行でない既知の 2 直線から，その交点を得る。

d. 既知の円と直線から，その 1 つまたは 2 つの交点を得る。

e. 既知の 2 つの円から，その 1 つまたは 2 つの交点を得る。

図 1 に公理 a による作図を示す。

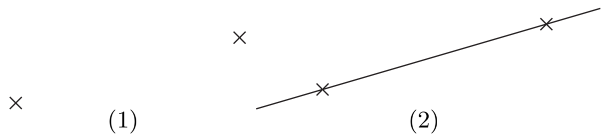

図 1: 公理 a による作図: (1) に示す与えられた 2 点を通る直線を定規を使用して，(2) のように引くことができる。

問 1 図 1 の作図手順を参考に，用意した道具で，作図公理 b，c，d，e を図示しなさい。

作図公理を利用して，任意の角の 3 等分線を引くことができないことはよく知られた結果である。すなわち， 次の定理が成立する。

定理 定規とコンパスによる作図操作を有限回適用して，平面上の任意の角を 3 等分することはできない。

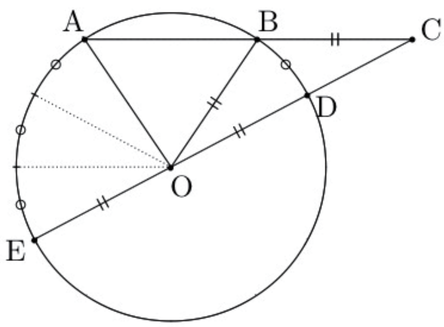

図 2: 角の 3 等分

問 2 図 2 において，ABC および，EODC はそれぞれ一直線に存在し，EABD は O を中心とする円周上に存在する。また，BO=BC である。$3\angle \mathrm{BOD} = \angle \mathrm{AOE}$ となっていることを証明しなさい。

問 3 最初に $\angle \mathrm{AOE}$ が与えられているとき，図 2 を定規とコンパスで作図できるとすれば定理に反する。作図公理ではどのような操作ができないために図 2 を作図できないか考察しなさい。

図3に示す(1)から(7)の手順によって任意の角θを折り紙で3等分できる。

(1) 任意の角θを折り紙の左下の角につくる。

(2) 折り紙の天地の辺に平行な直線FGを作る。

(3) 1つ前で作った平行線の下に地の辺と等間隔になる平行線HIを作る。

(4) BがHI上に，そしてFがBE上に乗るように折る。

(5) 1つ上でできた折り線とHIとの交点をJとする。

(6) 折った状態で，JとHを結ぶ折り線を紙の裏にもつけて元に戻す。

(7) 折り線に図のように記号をつけると直線BB$'$, BJが角を3等分する2つの直線である。

問4 図3の折り方で，$\angle$B$'$BO，$\angle$LBB$'$，$\angle$F$'$BLはいずれも$\angle$EBCの1/3であることを証明しなさい。

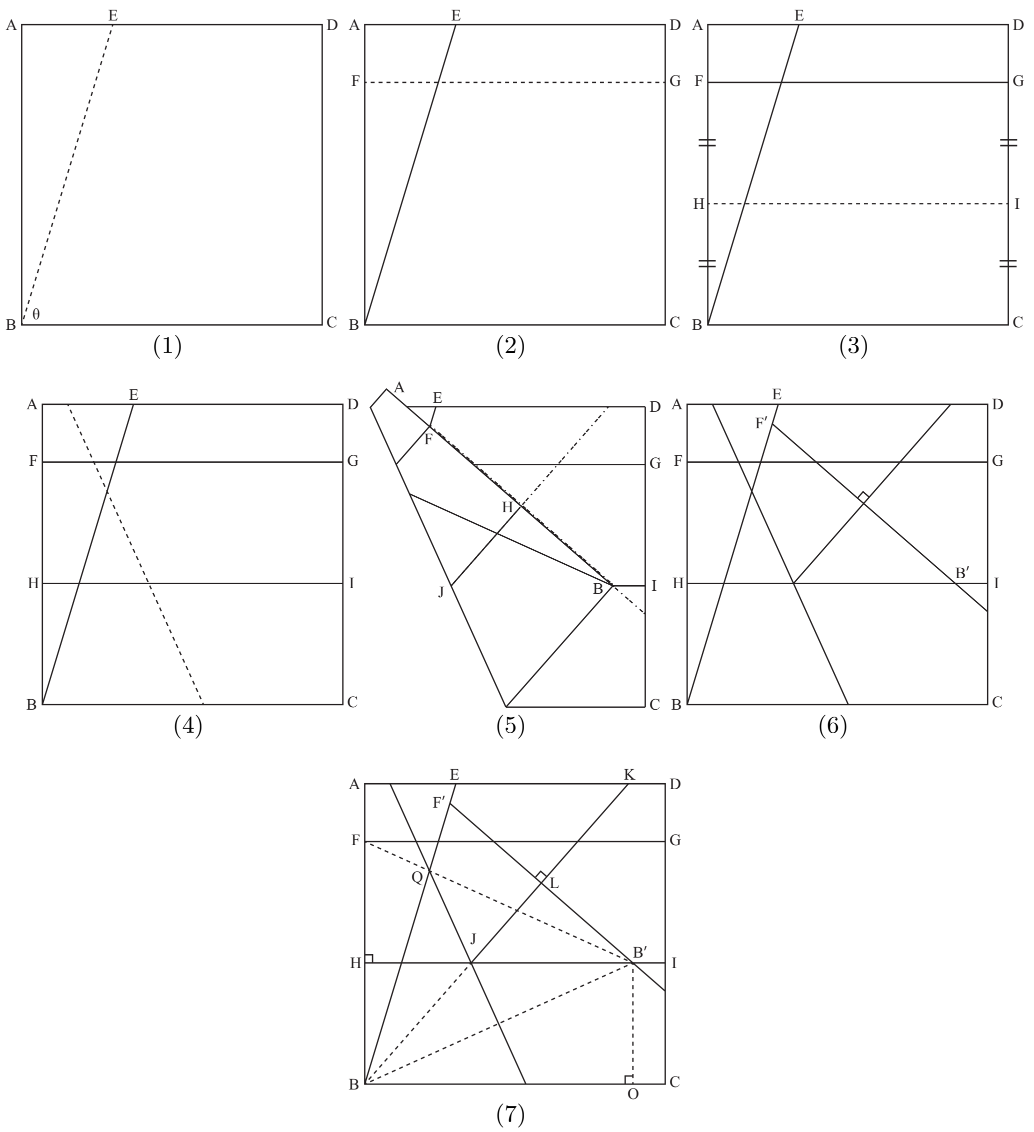

図 3: 折り紙による角の 3 等分: 図中で，点線は折り目を，一点鎖線は折り線を延長した線を示す。

定規とコンパスで 2 次方程式の解を作図できるが，ここでは、$a > 0,\ b > 0$ のとき，2 次方程式 $x^2 - 2ax - b = 0$ の折り紙による解法を考えてみる。

(1) 長さ $1, 2a, b$ を図 4 のように決め，$\mathrm{AB} = \mathrm{IC} = 1$ となるように直線 BCF を折る。また，$\mathrm{AI} = \mathrm{BC} = 2a$ となる直線 ICJ を折る。

(2) BCF に平行に，$\mathrm{BG} = \mathrm{FH} = 1$ となるように直線 GH を折る。

(3) 点 D を通り，点 A が直線 HG 上にくるように折って線 DE を決める。

(4) (3) で折り出した線分 DE と BF の交点を E としたとき，BE が求める長さになる。

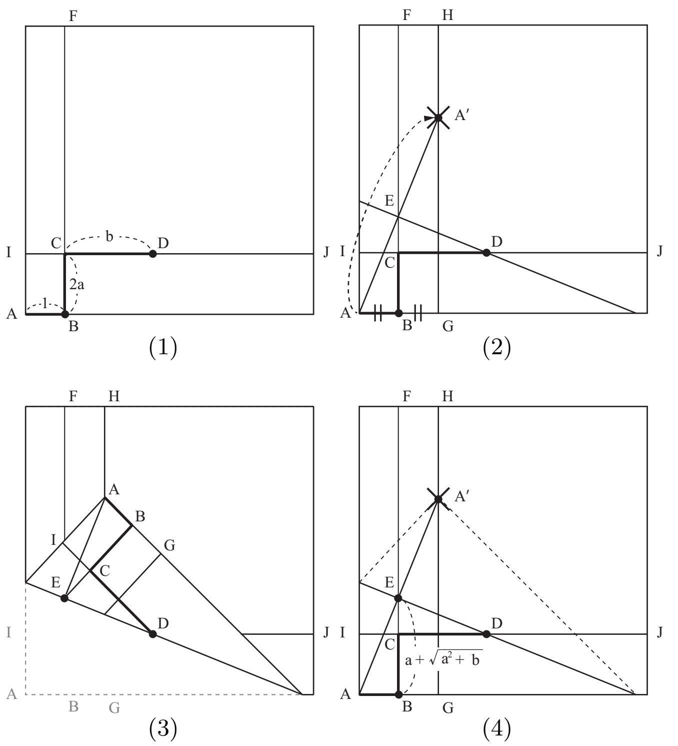

図 4: 折り紙による 2 次方程式の解法

問 5 図 4 の折り方で 2 次方程式の解を求めることができることを示しなさい。

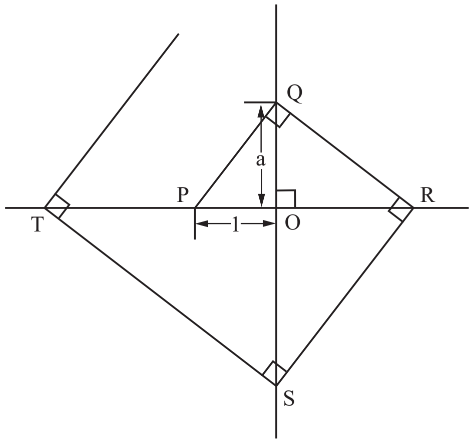

図 5: 螺旋状の折れ線

問 6 図 5 において，直線 TPOR と直線 QOS は互いに直交している．また， $\angle$PQR，$\angle$RST，$\angle$QRS はすべて直角である。線分 OP の長さを 1，線分 OQ の長さを a とするときに線分 OR，OS，OT の長さを求めなさい。

図 6 に示すように

(1) BQ $=$ QT $= 1$ となる平行線を折る。

(2) BJ $=$ JH $= n$ となる平行線を折る。

(3) J を ST 上に，Q を HI 上になるように折る。そして交点を J$'$, Q$'$ とする。
このときできた折り線と PQ，JK との交点をそれぞれ X，Y とする。

(4) OX $= \sqrt[3]{n}$ である。

によって整数の 3 乗根を求めることができる。

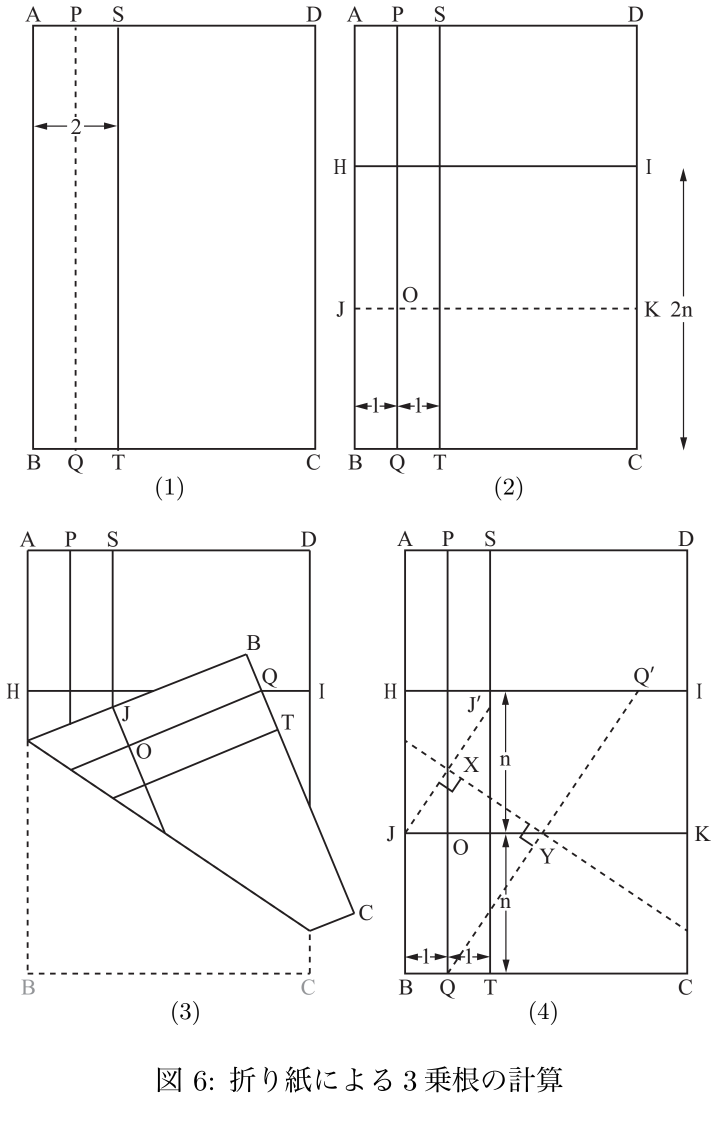

図 6: 折り紙による 3 乗根の計算

問 7 図 6 で $\mathrm{OX} = \sqrt[3]{\mathrm{OQ}}$ であることを証明しなさい。

問 8 三角関数の余弦の倍角公式と加法定理を利用して，余弦の 3 倍角の公式を導きなさい。

問 9 角の 3 等分を行う操作と，3 次方程式

$$x^3 + px + q = 0$$

を解く操作が同値であることを示しなさい。

以下の操作は，折り紙公理と呼ばれる折り紙の幾何学的操作である。

O1. 2 点 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ が与えられたとき，2 点を通るただ 1 つの折り方がある。

O2. 2 点 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ が与えられたとき，P_1 を P_2 に重ねるただ 1 つの折り方がある。

O3. 2 本の直線 l_1, l_2 が与えられたとき，l_1 を l_2 に重ねるような折り方がある。

O4. 1 点 P_1 と 1 本の直線 l_1 が与えられたとき，l_1 に垂直で P_1 を通るただ 1 つの折り方がある。

O5. 2 点 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ と 1 本の直線 l_1 が与えられたとき，P_1 を l_1 上に重ね，P_2 を通る折り方がある。

O6. 2 点 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ と 2 本の平行でない直線 l_1, l_2 が与えられたとき，P_1 を l_1 上に重ね，かつ P_2 を l_2 上に重ねる折り方がある。

O7. 1 点 P と 2 本の平行でない直線 l_1, l_2 が与えられたとき，P を l_1 に重ね，かつ折り線が l_2 に垂直な折り方がある。

折り紙公理によって，3 次方程式を解いたり，角の 3 等分ができることがわかる。

問 10 図 2 の例から，作図公理に，どのような操作を加えれば，角の 3 等分が作図可能になるか考えなさい。そして，その操作によって図 2 を作図できることを説明しなさい。

参考:2 次方程式の解の作図

(1) $\mathrm{AB} = 1$, $\mathrm{BC} = 2a$, $\mathrm{CD} = b$ とする。

(2) AD を直径とする円を描く。

(3) この円と BC を上に伸ばし，円と交わった点を E とする。

(4) BE の長さが $a + \sqrt{a^2 + b}$ となり，これは $x^2 - 2ax - b = 0$ の解である。

以上のように図 4 は定規とコンパスだけで作図可能である。

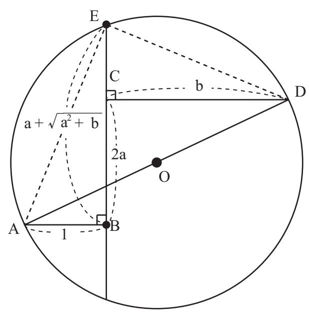

図 7: 2 次方程式の解の作図